Roland Schröder

Graphiktaschenrechner und Computeralgebra im Mathematikunterricht

Reihe Mathematik

Bestellnummer 02-020-055

LEHRER SELBST VERLAG

Zum Autor

Roland Schröder, Jahrgang 1944, pensionierter Oberstudienrat für Mathematik und Sport, Vorsitzender der Celler Gesellschaft zur Förderung der Mathematik, 12 Auslandsschuldienstjahre (Addis Abeba, Riad, Istanbul).

Lehrerselbstverlag
Sokrates & Freunde GmbH, Bonn (Germany) 2010
www.lehrerselbstverlag.de

Lektorat: Thomas Michael Krause
Layout: Josephine Mahler
Druck: docupoint GmbH, Magdeburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dies ist keine Gebrauchsanweisung für Taschenrechner und Kleincomputer. Dafür gibt es Handbücher. Es ist ein Diskussionsbeitrag auf der Suche nach einem Konzept, der auch dann als nützlich angesehen wird, wenn er keine uneingeschränkte Zustimmung findet.
Graphiktaschenrechner (GTR) und Computeralgebra (CAS) haben den Mathematikunterricht des vorigen Jahrhunderts aus den Angeln gehoben. Was bis heute fehlt ist ein wissenschaftlich begründetes, praktisch erprobtes Konzept für den Umgang mit GTR und CAS. Folglich gibt es fast so viele Vorgehensweisen, wie es Mathematiklehrer gibt, die mit den neuen Werkzeugen umgehen.
Das vorliegende Heft soll einen Eindruck davon vermitteln, wie der Autor, ein ehemaliger Gymnasiallehrer, in den vergangenen 40 Jahren mit GTR und CAS im Mathematikunterricht umgegangen ist. Kapitel 1 nennt grundsätzliche Überlegungen, von denen der Autor hofft, dass sie Zustimmung finden und die konzeptionelle Arbeit in den Kollegien beeinflussen können. Kapitel 2 plädiert für die Pflege von Fertigkeiten im Rechnen und nennt die Anforderungen von Universitäten dazu. Kapitel 3 zeigt exemplarisch, wie Aufgaben aussehen könnten, die auch mit neuen Werkzeugen noch anspruchsvoll genug bleiben. Die Aufgabensammlungen der Kapitel 2 und 3 erheben keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Sie dienen lediglich als Anregung gepaart mit der Hoffnung, dass der Leser selbst schöpferisch tätig wird oder aber in der reichlich vorhandenen Literatur nach entsprechenden Aufgaben sucht.

Kapitel 1: Grundsätzliches

1.1 Vierzig Jahre Mathematikunterricht und Computer
Eine Geschichte noch ohne Happy End

Schon Ende der 60er Jahre, als die Computer noch monströse und in der Bedienung unkomfortable Maschinen waren, begann man der Frage nachzugehen, wie Computer beim Lernen und Lehren genutzt werden können. Dem computer-unterstützten Unterricht (CUU) wurde dabei großes Gewicht beigemessen. In Verbindung mit einem beachtlichen Optimismus, der den technischen Fortschritt in der Rechnerentwicklung begleitete, wurde die Hoffnung abgeleitet, durch das Medium *Computer* den Unterricht grundsätzlich verändern und verbessern zu können. Es wurde angenommen, dass der Computer sich in ganz besonderer Weise dazu eignet, Entwicklungen in der Unterrichtstechnologie zu realisieren.
Mitte der 70er Jahre kamen allerdings Zweifel am Gelingen der Umsetzung der Konzepte des CUU auf. Die überzogenen Erwartungen, die an den CUU gestellt worden waren, konnten nur teilweise eingelöst werden, die Annahmen zur Brauchbarkeit des Einsatzes von Computern im Unterricht bestätigten sich nicht im erhofften Maß. Daher flaute das Interesse ab, das die Politik und vor allem die finanzstarke Computerindustrie dem CUU entgegenbrachte.
Ein wichtiges Kennzeichen der 80er Jahre war die Herausbildung einer Informationsgesellschaft, in der speziell durch die Entstehung und Verfügbarkeit von Kleincomputern bzw. Computernetzen der Umgang mit Elektronik und mit Computern alltäglich wurde. Damit wurde quasi von selbst auch die Idee des Lernens mit dem Computer wieder zu einer naheliegenden Unterrichtsform. Eine dringliche Aufgabe der pädagogischen Forschung war seither, Möglichkeiten und Grenzen der Einbettung des Lernens mit dem Computer in den herkömmlichen Unterricht zu eruieren.
Wie steht es um diese pädagogische Forschung? Bislang fehlen Forschungsergebnisse auf deren Grundlage Bildungsbehörden und Pädagogen vor Ort ein wissenschaftlich begründetes Konzept in die praktische Erprobung schicken konnten. Die Behörden haben Taschenrechner zuerst verboten, dann unter Auflagen geduldet und schließlich flächendeckend vorgeschrieben. Die Pädagogen vor Ort entwickeln mangels erprobter und begründeter Konzepte ihre individuellen Lösungen, welche vom Fast-Ignorieren des neuen Werkzeugs bis zu geradezu freakhaftem Verhalten im Umgang damit reichen.

Konsens ist immerhin, dass eine Unterscheidung verschiedener Formen des Lernens einer Analyse der Verwendung des Computers beim Lernen vorangehen muss. Verschiedene Lernformen benötigen unterschiedliche Computerprogramme, deren Verwendungsmöglichkeit demzufolge differenziert betrachtet werden muss. Man unterscheidet vier Lernarten:

1. Lernen als Wiederholen und Memorieren;
2. Lernen als interaktiver und konstruktiver Prozess;
3. Lernen als explorativer und entdeckender Prozess;
4. Lernen als Rekonstruktionsprozess.

Auf diese Einteilung abgestimmt können vier Typen von Computerprogrammen unterschieden werden, die zu jeweils einer der Lernformen kongruent sind:

1. Übungsprogramm,
2. Tutorielles Programm,
3. Simulationsprogramm und
4. Cognitive Tool.

Die praktische Realisierung intelligenter tutorieller Unterweisung ist jedoch weit weniger fortgeschritten, als die optimistischen Verlautbarungen in diesem Bereich nahelegen. Die meisten der bisher entwickelten Programme sind nicht in der Lage, hinreichend differenzierte Modelle über die kognitive Struktur des Lernenden aufzubauen, die für eine gezielte individuelle Unterweisung in komplexen Domänen notwendig sind. In Bezug auf die Forschung zu Simulationsprogrammen als Lernmedium muss ebenso wie im Falle der Übungsprogramme und der tutoriellen Programme festgestellt werden, dass in der deutschsprachigen Forschung neben der Programmentwicklung meist keine Zeit blieb, methodisch befriedigende Evaluationen vorzunehmen. In einer ersten Evaluation (Schuljahr 1989/90) wurde der Planspieleinsatz in vier Experimentalklassen mit Kontrollklassen ohne Planspielunterricht verglichen. Es zeigte sich keine Überlegenheit der Experimentalklassen, was insofern enttäuschend war, als der unterrichtsmethodische Aufwand beim Planspieleinsatz erheblich höher war als beim konventionellen Unterricht.
Eine mögliche Ursache für die hier geschilderten Mängel kann sein, dass die Lehrer nicht genügend auf die völlig neue pädagogische Situation vorbereitet waren. Es genügt nicht, Lehrern, Kursleitern oder Schulen Computer und Lernsoftware zur Verfügung zu stellen; vielmehr sind entsprechende Trainings- oder Weiterbildungsmaßnahmen erforderlich.

Es kann nicht bezweifelt werden, dass das Thema *Lernen mit dem Computer* in der heutigen Empirischen Pädagogik eine zentrale Rolle spielen muss. Trotz durchaus vielfältiger Anstrengungen kann aber der Forschungsstand keineswegs zufriedenstellen; vielmehr ist festzuhalten, dass zu wenige theoriegeleitete empirische Befunde vorliegen. Die meisten Aktivitäten zum Lernen mit dem Computer innerhalb der Empirischen Pädagogik befassen sich mit der Entwicklung und dem Einsatz neuer Lernsysteme, zu wenige jedoch mit deren Evaluation oder gar mit der kognitiven Modellierung der dabei intendierten und initiierten Lernprozesse. Kritisch anzumerken ist zudem, dass sich die Pädagogik stark an der Technikentwicklung orientiert: Pädagogisch wird das erforscht, was technisch bereits realisiert ist. Stattdessen sollten umgekehrt solche Systeme

entwickelt werden, die pädagogisch sinnvoll sind. Pädagogische Theoriebildung sollte der Erstellung der Systeme also vorausgehen und sie leiten.
Der „Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik“ hat im Mai 2009 eine Stellungnahme an die KMK formuliert, aus der folgende Passage zitiert wird:

> *Um erfolgreiches Lernen von Mathematik initiieren zu können, das durch die Nutzung digitaler Medien unterstützt wird, müssen Lehrerinnen und Lehrer selbst über ein breites Repertoire didaktischer Ideen zum Einsatz des Computers verfügen. Wir plädieren mit Blick auf die schulische Realität dafür, dass es in allen Ländern eine breite Palette an Unterstützungsmöglichkeiten für Lehrkräfte gibt. Dazu gehören*
>
> - *methodisch-didaktische Handreichungen, die primär die didaktische Umsetzung berücksichtigen und viele Beispiele mit Blick auf die KMK Standards enthalten,*
> - *Fortbildungen,*
> - *Unterstützung vor Ort (ggf. auch durch die Schulaufsicht) und*
> - *detaillierte Vorgaben für Prüfungen, um Lehrerinnen und Lehrern Sicherheit bei der Planung und Durchführung ihres Unterrichts zu geben.*

1.2 Mathematiklernen

Eine Philosophie vom Kopf auf die Füße stellen.

Es liegt in der Natur des Computers, dass ihm die Mathematik in besonderer Weise zugänglich ist. Deshalb existieren gerade für dieses Fach in großer Auswahl Programme zu den vier Lernarten (s.o.). Auch diese Programme orientieren sich in erster Linie am technisch Machbaren und erst in zweiter Linie oder auch gar nicht an den Erfordernissen des Lehrens und Lernens von Mathematik. Schon gar nicht orientieren sie sich an der Frage, was Mathematik ihrem innersten Wesen nach sei und was davon unbedingt dem Schüler vermittelt werden müsse. Was der Computer und vor allem sein kleiner Bruder, der Taschenrechner am allerbesten können ist eben Rechnen und infolge dessen rechnen vor allem die Schüler ohne Rücksicht auf Verluste alles aus. Ganze Aufgabenplantagen, ganze Themenfelder herkömmlichen Unterrichts werden dadurch obsolet. Das muss man nicht bedauern, das kann man auch begrüßen. Aber werden mit dem großen Kehraus nicht auch Kinder mit dem Bade ausgeschüttet?
Die Fragenkette *1. Was ist Mathematik? 2. Was ist dann Mathematikunterricht? 3. Welchen Beitrag kann der Computer (und der Taschenrechner) zu diesem Unterricht liefern?* wird in dieser Reihenfolge nicht beantwortet. Stattdessen heißt die Fragenkette: *1. Was kann der Computer? 2. Welche Aufgaben können (müssen) wir jetzt streichen? 3. Welche Aufgaben müssen (können) wir jetzt stellen?*

Welche Vorteile der Computereinsatz im Mathematikunterricht hat, wird schnell erkannt, welche Nachteile damit aber verbunden sein könnten, wird nicht in Erwägung gezogen. Die für die Lehrpläne Verantwortlichen fragen nicht *Was ist Mathematik?* sondern *Wo lagen die Defizite des herkömmlichen Mathematikunterrichts und wie kann der Computer helfen, diese Defizite zu minimieren?* Sowohl in der öffentlichen Meinung als auch in der PISA-Studie liegen die beiden größten Defizite des herkömmlichen Mathematikunterrichts auf der Hand: mangelnde Nachhaltigkeit und mangelnder Realitätsbezug. Für beide Krankheiten ist der Computer ein hochwirksames Heilmittel. Zu Risiken und Nebenwirkungen wird niemand befragt. Natürlich ist es unmöglich, den Computer (und noch unmöglicher, den Taschenrechner) aus dem Mathematikunterricht heraus zu halten. Aber der Lehrer sollte wissen, was er sich damit einhandelt.

Im vorliegenden Heft wird nun der Versuch unternommen, die Chancen, die der Computer bietet, zu würdigen, was unerlässlich mit einschließt, Fehlentwicklungen herauszustreichen. Zunächst einmal soll die Basisfrage beantwortet werden.

1.3 Was ist Mathematik?

Die hypostatische Abstraktion

Wenn man Mathematik lehren will, sollte man eine Idee davon haben, was Mathematik eigentlich ihrem innersten Wesen nach ist. In der Literatur kann man zur Beantwortung dieser Frage häufig lesen, in welche Teilgebiete die Mathematik aufgegliedert werden kann oder welche Tätigkeiten beim Betreiben von Mathematik auszuführen sind. Aber so ist die Frage nicht gemeint. Manchmal versucht man der Frage, was Mathematik eigentlich sei, auszuweichen mit der Aussage, dass sich die Mathematik im letzten Vierteljahrhundert erheblich gewandelt hat. Das kann so nicht stehen bleiben. Natürlich hat sich die Mathematik weiterentwickelt, dabei aber vermutlich nur so nebenbei und wie schon in früheren Zeiten (und wie üblich in besonders einseitigen Ausprägungen im Schulbereich, man denke nur an die „Mengenlehre“). Aus dem Erfahrungsmaterial über deren Vergänglichkeit werden jedoch noch immer kaum die nötigen Lehren gezogen (Kießwetter, 2005).

Was Mathematik eigentlich sei, ist seit Jahrtausenden bekannt. Euklids Elemente sind bis heute nicht obsolet, wohl aber einige modische Ausprägungen vor allem im Schulbereich. Es gibt Versuche, in einem einzigen Satz das Wesen der Mathematik beschreiben zu wollen. Solche Versuche können ohne spätere Erläuterung nicht stehen bleiben. Sie kommen jedoch der hier gestellten Kernfrage deutlich näher als vieles, was sonst noch dazu geschrieben wird. Eine äußerst komprimierte Antwort gibt Wille: „Mathematik ist die Wissenschaft von den kalkülbezogenen Handlungen zur Erzeugung formal-synthetisch wahrer Aussagen mit einer apriorischen Geltung.“ (Wille 2001).

Selbstverständlichkeiten niederzuschreiben. Fatal wird die Sache erst dann, wenn man glaubt, mit der Anpassung der Aufgaben an die neue Situation bereits die methodisch-didaktischen Grundfragen dieser Situation geklärt zu haben. Gänzlich fatal ist schließlich die Auffassung, Schüler brauchen nur noch diejenigen Aufgaben selbst zu lösen, die der Computer nicht besser oder schneller lösen kann, und im Übrigen das zu lehren und zu lernen was zur Bedienung elektronischer Rechenhilfen notwendig ist. Das hier vorliegende Heft soll einen Beitrag liefern, diese Fehleinschätzung zu begründen.

1.6.2 Was muss neu erfunden werden?

Welche neuen Felder der Mathematik erschließen elektronische Rechenhilfen für den Mathematikunterricht? Unter dieser Fragestellung blühen oft auch Fehlentwicklungen, die zum Glück schon bald als modisches Zeug wieder verworfen werden. Bekanntestes Beispiel dafür ist die Bestrebung, das Thema „Chaos und Fraktale“ in den allgemeinbildenden Mathematikunterricht zu integrieren. Deutlich gelungener ist die verbindliche Aufnahme der Stochastik in den Stoffplan. Nachdem die Stochastik entrümpelt werden konnte, weil der sachgerechte Gebrauch eines umfangreichen Tabellenwerkes nicht mehr gelehrt werden muss und jede gewünschte Tabelle einer Verteilung samt ihrer Darstellung gezielt auf dem Rechner aufgerufen werden kann, gewinnt die ursprünglich trockene und oft nur oberflächlich zu behandelnde Disziplin an Farbe und Tiefe. Eine mindestens ebenso gute Idee könnte es sein, die Zahlentheorie jetzt zum Unterrichtsgegenstand zu erklären. Früher war die elementare Zahlentheorie eine Hilfsdisziplin bei der Vorbereitung der Bruchrechnung. Mit dem Siegeszug der elektronischen Rechenhilfen sank das Interesse an der Bruchrechnung (fatalerweise, wie an anderer Stelle begründet). Der Bedeutungsverlust der Bruchrechnung fegte die elementare Zahlentheorie gleich mit hinweg. Und das, obwohl Carl Friedrich Gauß sie zur Königin der Mathematik erklärt hatte und die Zahlentheorie im Zusammenhang mit der immer wichtiger werdenden Kryptografie eine ganz neue Bedeutung erlangt hat. Der Rechner ist ein ausgezeichnetes Instrument zum Betreiben von Zahlentheorie und Kryptografie. Wer bestimmt in diesem Land eigentlich, was wichtige Mathematik ist und was nicht?

In besonderer Weise erschließen sich dem Computer viele rekursiv beschriebene Vorgänge. Leider fegt der Computer selbst deren Thematisierung sofort wieder hinweg, weil er die rekursiven Routinen implementiert hat und vom Anwender nicht mehr erwartet. Erstaunlich ist, dass die für die Stoffpläne Verantwortlichen zwar die elektronischen Rechenhilfen propagieren, deren besondere Eignung und Stärke für rekursive Prozesse aber gleichzeitig links liegen lassen.

1.7 Schlüsse aus dem bisher Gesagten

Unbestritten nützlich ist der Einsatz von Computer und Taschenrechner im Mathematikunterricht dann, wenn

1. Wirkungen der Veränderung einzelner Parameter auf ein Gesamtsystem anschaulich gemacht und untersucht werden sollen,
2. eine große Anzahl Beispiele zur Erhärtung einer Hypothese dienen können,
3. mühselige und zeitraubende Rechnungen wegen ihrer Komplexität vom eigentlichen Gedankengang ablenken,
4. das Nachschlagen in einem Tafelwerk erspart wird,
5. nur rekursive Verfahren zur (näherungsweisen) Bestimmung von Lösungen vorliegen und explizite Formeln nicht oder noch nicht existieren,
6. das Arbeitsgedächtnis in seiner begrenzten Kapazität entlastet werden kann.

Auf jeden dieser sechs Punkte soll noch einmal näher eingegangen werden. Welche Chancen und welche Risiken hinsichtlich des Erfolges bei der Vermittlung von Mathematik birgt jeder dieser Aspekte?

Zu 1: Bedeutung von Parametern anschaulich machen und untersuchen

Man denke hier zum Beispiel an den unbestreitbaren Nutzen dynamischer Geometrieprogramme, wo „Wanderungen" eines einzelnen Punktes alle Veränderungen davon abhängiger Punkte und Größen innerhalb einer geometrischen Konstruktion automatisch „nach sich ziehen". Dem aufgeweckten Schüler drängen sich angesichts solcher Demonstrationen angemessene Hypothesen geradezu auf. Zu befürchten ist allerdings, dass sein Bedürfnis nach einem Beweis der Hypothese gleichzeitig deutlich nachlässt. Für Schüler haben Rechnerergebnisse eine viel zu hohe Überzeugungskraft, welche der Lehrer von Zeit zu Zeit durch geeignete Beispiele erschüttern muss.

Ein anderes schönes Beispiel für die Wirkung der Veränderung einzelner Parameter auf ein Gesamtsystem ist die Darstellung einer Graphenschar mit Hilfe des GTR oder des CAS, welche dem Schüler nachhaltig verdeutlicht, welche Bedeutung bestimmte Parameter der Funktionsgleichung haben. Bevor man allerdings Graphen elektronisch bereitstellt, muss jedem Schüler völlig klar sein, wie man die Graphen auch im vor-elektronischen Zeitalter gewinnen konnte. In der heutigen Oberstufe wissen viele Schüler nicht, wie man zu einer gegebenen Stelle $x = a$ den zugehörigen Funktionswert $f(a)$ findet, ja nicht einmal, was $f(a)$ überhaupt bedeutet und dass man das Ganze „f von a" und nicht etwa „f mal a" liest. Ein Schüler mit derartigem Mathematikverständnis sagt ohne rot zu werden: „Der Graph einer Funktion ist das, was im Grafikfenster erscheint, wenn ich den Funktionsterm eingebe und dann auf Graph drücke." Das kann aber nicht das Ziel unseres Mathematikunterrichts sein.

Zu 2.: Hypothesen widerlegen oder erhärten

Unsere Schulmathematik wird zunehmend ärmer an Themen, bei deren es um Hypothesen geht, die vor allem nach Berechnung einer großen Datenmenge gefunden werden können und bei denen dann der Rechner eine große Bereicherung darstellen könnte. Hier liegt ein eigenartiger Widerspruch, den unsere Chefdidaktiker bisher nicht erklären konnten. Wenn die elektronischen Hilfsmittel für die Mathematik immer wichtiger werden, dann doch gerade in diesem Zusammenhang, der aber immer stärker aus dem Stoffplan verdrängt wird. Es seien einige Beispiele genannt auf die Gefahr hin, dass kein Bezug (mehr) zum realen Unterrichtsgeschehen existiert. Summenformeln für Reihen können zum Beispiel gefunden werden, indem man einer zuvor berechneten Teilsummenfolge ein Muster ansieht. Über Grenzwerte unendlicher Folgen und Reihen können an Hand ihrer graphischen Darstellung sinnvolle Vermutungen aufgestellt werden. Dass die Längen von Diagonale und Seite eines Quadrats inkommensurabel sind, zeigt uns ein primitives Computerprogramm eindringlicher als alle Theorie. Auch das Entdecken und Verstehen einiger Hypothesen und Verfahren zur elementaren Zahlentheorie werden durch elektronische Rechenhilfen wesentlich erleichtert. Ich denke da vor allem an modulare Betrachtungen. Es gab Zeiten, in denen war der Begriff „Restgleichheit“ Unterrichtsgegenstand in der sechsten Klasse. Heute werden nicht einmal mehr Teilbarkeitsregeln erwähnt. Ist ja klar: Wir haben einen Knecht der uns die Frage der Teilbarkeit in jedem Falle zuverlässig beantwortet. Aber ist das nun wirklich Mathematik? Und passt das zu der großen Bedeutung, welche die modulare Arithmetik in jüngster Zeit gewonnen hat?

Zu 3.: Rechnen

Die Aufgabe 3,4561 x 7,2487 kann mit dem Taschenrechner gelöst werden, ohne dass die Mathematik dabei Schaden nimmt. Die Größenordnung des Ergebnisses allerdings sollte feststehen, bevor ein Hilfsmittel eingesetzt wird. Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, ist das genaue Ergebnis sogar uninteressanter als seine Größenordnung. Dass heute Schüler dazu neigen, jede noch so einfache Aufgabe (z.B. 25 : 2,5) mit dem Taschenrechner zu rechnen, mag man bedauern, ist aber noch keine mathematische Sünde. Unverzeihlich wird die Sache erst dann, wenn unmittelbar sichtbare Ergebnisse (25 : 2,5 = 10) nicht gesehen werden und die dann einsetzende Tipperei von der eigentlichen Aufgabe ablenkt (ganz zu schweigen von der bedenkenlosen Weiterverwendung von Zwischenergebnissen, die durch Bedienungsfehler entstellt wurden). Auch darf die intellektuelle Leistung, die darin liegt, ein Ergebnis zu „sehen“, nicht unterschätzt werden. Dieses „Sehen“ findet auf allen Ebenen statt und ist ein entscheidender Wesenszug des Mathematik-Treibens. Also bitte nicht achtlos beiseiteschieben. Rechengesetze müssen beherrscht werden, auch dann, wenn das Rechnen der Taschenrechner übernimmt. Das hat im Wesentlichen zwei Gründe: Zum einen müssen die Rechengesetze als Mittel zur Rechenvereinfachung begriffen werden (man denke an den jungen Gauß und seine Summenformel). Zum zweiten benötigt man alle Regeln und Gesetze, die für Zahlen gelten; im Rahmen der Schullaufbahn irgendwann auch für Terme (man denke an die Umformung eines Differenzenquotienten zum Zwecke der Grenzwertbetrachtung).

Ein Schüler, der $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ nur noch mit dem Taschenrechner berechnen kann, wird $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$ auch nicht berechnen können. In der Türkei sind Taschenrechner bis in die Hochschulaufnahmeprüfung hinein im Schulunterricht verboten. Beobachtungen in der deutschen Abteilung eines großen Istanbuler Gymnasiums zeigen, dass die türkischen Schüler seltener gegen Rechengesetze verstoßen und trotz eines sehr ergebniszentrierten Unterrichts über deutlich höhere Problemlösekompetenzen verfügen als vergleichbare deutsche Schüler.

Zu 4.: Tafel-Ersatz

Die Zeiten der logarithmischen Berechnung trigonometrischer und anderer Größen sind mit der Einführung des Taschenrechners vorbei, und das ist auch gut so. Die allermeisten Wurzeln, Logarithmen, Sinus- und Kosinuswerte kennt niemand auswendig und ihr Nachschlagen in einer Tafel ist auch nicht geistreicher als ihr Aufruf im Display eines Rechners. Allerdings gilt hier fast das Gleiche wie im Absatz zuvor: Die Wurzel aus 64 und den Logarithmus von 8 zur Basis 2 muss schon deshalb ohne Taschenrechner gefunden werden können, weil auf diese Weise der Nachweis erbracht wird, die Begriffe „Wurzel“ oder „Logarithmus“ und deren mathematischen Gehalt wirklich verstanden zu haben. Es kann außerdem nicht schaden, geometrische Figuren zu kennen, welche bestimmte Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte evident machen.

Zu 5.: Erweiterung des Spektrums der Lösungsmethoden

Die Mathematik braucht keine Modernisierung ihrer Inhalte mit der Begründung, dass sich die Hilfsmittel zum Betreiben von Mathematik verändern. Natürlich muss sich Mathematik verändern und das tut sie ja auch und zwar vor allem, indem sie wächst. Und in der großen Mathematik ist das ein gesundes Wachstum, im dem Wildwuchs und Wucherungen rasch abgestoßen werden. Im Schulbereich dagegen können sich Krebsgeschwüre so lange vergrößern bis es weh tut. (Man denke an „Mengenlehre“ oder „Chaos und Fraktale im Mathematikunterricht“.) Wenigstens aus dem zweiten Beispiel sollten wir lernen, dass folgende Begründung keine Tragfähigkeit besitzt: *„Weil wir das jetzt technisch machen können, müssen wir es tun.“*

Es gibt allerdings eine Ausnahme: Rekursive Verfahren gewinnen mit recht an Bedeutung. Computer und Taschenrechner sind hier die idealen Hilfsmittel und erst durch sie konnte die Bedeutung der Verfahren so groß werden. Nullstellen von Funktionsgraphen – um nur ein Beispiel zu nennen – lassen sich heute problemlos mit hoher Genauigkeit bestimmen. Dennoch sollten Schüler weiterhin in der Lage sein, die Nullstellen linearer Graphen und quadratischer Parabeln ohne Rekursionsverfahren festzustellen. Schüler sollen auch und gerade in diesem Zusammenhang lernen, unter verschiedenen Methoden sachgerecht auszuwählen und die Ergebnisse – etwa hinsichtlich ihrer Genauigkeit – zu bewerten. Als Lösung der Gleichung $x^2 + 2x = 1$ geben Schüler gern auch die Zahl 0,4142135624 an. Man sollte ihnen klar machen, dass dies ein Ergebnis von mathematisch geringer Qualität ist.

Wie schon gesagt, Rahmenrichtlinien und Kerncurricula verzichten heute einfach auf Themen aus dem „klassischen“ Mathematikunterricht, wie z.B. die propädeutische Elementare Zahlentheorie. Wer der Frage nach dem gemeinsamen Teiler großer Zahlen aber ausweicht, weil der Taschenrechner die Brüche addiert, beraubt die Schüler einer ganzen Reihe damit zusammenhängender tiefgreifender Erkenntnisse und Entdeckungen. Gerade die Entdeckung und Anwendung rekursiven Denkens bietet sich beim Thema „größter gemeinsamer Teiler“ unmittelbar an und steigert die Methodenkompetenz selbst junger Schüler ganz wesentlich. Übrigens: Kinder lieben rekursive Vorgänge („*Es war einmal ein Mann, der hatte sieben Söhne*...“; „*Ein Hund lief in die Küche und stahl dem Koch ein Ei*.“…). Auch hier ist die neuere Mathematikdidaktik nicht geradlinig, indem sie den Rechner zwar favorisiert, ihn aber gleichzeitig wesentlicher Anwendungsvorteile beraubt.

Zu 6.: Entlastung des Arbeitsgedächtnisses

Computer und Taschenrechner sind nichts weiter als Hilfsmittel des Mathematiktreibenden, wie z.B. auch Zettel, Bleistift, Zirkel, Lineal und (früher) Tafelwerk. Keines dieser Hilfsmittel nimmt eine grundsätzlich vorrangige Position ein. Die Mathematik selbst findet im Kopf statt und die Hilfsmittel helfen uns vor allem, Kapazitätsschwächen unseres Arbeitsgedächtnisses auszugleichen. Das ist gut so, und in diesem Sinne sollten wir jedes Hilfsmittel nutzen, das uns zur Verfügung steht. Zweierlei sollten wir dabei nicht aus den Augen verlieren: Erstens kann die Nutzung von Computer und Taschenrechner auch Zugänge zu wichtigen mathematischen Erlebnissen verstellen. Das sollte in dem bisher Gesagten bereits deutlich geworden sein. Und zweitens kann auch der Erwerb einer wichtigen heuristischen Kompetenz behindert werden. Dies bedarf der Erläuterung: Wie bereits erwähnt, brauchen wir Hilfsmittel, um Kapazitätsschwächen unseres Arbeitsgedächtnisses auszugleichen. Scheitert nun ein denkendes Gehirn an fehlenden Hilfsmitteln? Zum Glück nicht immer. Die großen Mathematiker der vergangenen Jahrhunderte sind hier die besten Beispiele. Das trainierte Gehirn hat nämlich eine wunderbare Fähigkeit, welche das Arbeitsgedächtnis auf eine ganz andere Weise entlastet: die Fähigkeit zur Bildung von Superzeichen. Die Ausprägung dieser Fähigkeit bedarf des Trainings. Der Computer ist für dieses Training ebenso tauglich, wie das Auto für das Training des Langstreckenlaufes. Der mehrfache Olympiasieger Abebe Bikila wurde deshalb ein hervorragender Langstreckenläufer, weil er als Leibwächter des Kaisers Haile Selassi gezwungen war, alle Botengänge im Laufschritt zurückzulegen. Gauß und Euler haben mangels elektronischer Hilfsmittel sehr lange Wege „zu Fuß“ gehen müssen. Man weiß, wozu das gut war!

Kapitel 2: Aufgaben ohne GTR und CAS

2.1 Rechnen

Schüler sollten weiterhin rechnen können - in welchem Umfange, darüber gehen die Meinungen auseinander. Vier Mitglieder des „Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik“ (Heugl, Herget, Kutzler, Lehmann) sind das Risiko eingegangen sich massiver Kritik auszusetzen und haben einen Katalog handwerklicher Kompetenzen vorgelegt, welche sie auch noch im CAS-Zeitalter für unverzichtbar halten. Der Katalog besteht sinnvoller Weise ganz konkret aus Aufgaben, die von Zeit zu Zeit von Schülern gelöst werden sollten, um so den Nachweis zu erbringen, dass das Rechnen noch nicht völlig verlernt wurde. Dieser Katalog wird im Folgenden abgedruckt:

a) Bestimme genau: $\sqrt{81}$
b) Bestimme ungefähr $\sqrt{120}$
c) Vereinfache $\frac{10^2}{5^2}$.
d) Vereinfache $3:\frac{1}{3}$
e) Vereinfache $\frac{5a}{5}$
f) Vereinfache $\frac{a}{5} \cdot 5$
g) Vereinfache $\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{y}$
h) Vereinfache $2a - \frac{a}{3}$
i) Vereinfache $\frac{a}{3} + \frac{a}{7}$
j) Vereinfache $\frac{5}{x} - \frac{2}{x}$
k) Vereinfache $\frac{2}{x} - \frac{5}{y}$
l) Schreibe ohne Klammern $a - (b + 3)$
m) Schreibe ohne Klammern $2(a \cdot b)$
n) Schreibe ohne Klammern $3(5a - 2b)$
o) Schreibe ohne Klammern $(3 + a)(b - 7)$
p) Schreibe mit Klammern $2a + 2b$
q) Schreibe mit Klammern $x^2y + xy^2$
r) Schreibe als Produkt zweier Faktoren $3ab + 6ac$
s) Schreibe als Produkt zweier Faktoren $x^2 - 4$
t) Löse nach x auf $3x - 6 = 12$
u) Löse nach x auf $\frac{x}{3} = 5$
v) Löse nach x auf $a \cdot x = 5$
w) Für welche Zahlen x gilt: $x + 1 = x$
x) Für welche Zahlen x gilt: $x + 1 = x + 1$
y) Löse nach r auf: $U = 2\pi r$
z) Für welche Zahlen x gilt: $|x| = 1$

1) Löse nach x auf: $x^2 = 4$
2) Löse nach x auf: $x^2 - 9 = 0$
3) Löse nach x auf: $x^2 - x = 0$
4) Löse nach x auf: $x^2 = a$
5) Löse nach r auf: $A = 4\pi r^2$
6) Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $x - 2 < 4$
7) Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $-2x < 4$
8) Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $x < x + 1$
9) Für welche natürlichen Zahlen x gilt: $x < x$
10) Leite einmal ab: $y = 3x^4 + 2x + 5$
11) Leite einmal ab: $y = \frac{1}{x^2}$
12) Leite einmal ab: $y = \sqrt{x}$
13) Leite einmal ab: $y = \sin x$
14) Leite einmal ab: $y = (3x + 2)^2$

4. Es sei $f(x) = x^2$. Schreibe hinter jeden Umformungsschritt die dort angewendeten Regeln, Vereinbarungen oder Gesetze:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ ______________________

$$= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$ ______________________

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$ ______________________

$$= \frac{2xh + h^2}{h}$$ ______________________

$$= \frac{h(2x+h)}{h}$$ ______________________

$$= 2x + h$$ ______________________

Welchen Zweck kann diese Rechnung haben?

5. Wahr oder falsch?

a) Wenn für zwei Zahlen x und y gilt x + y = 1, welche Aussagen sind dann wahr, welche falsch? Kreuze an.

	wahr	falsch
Wenn x positiv ist, muss y negativ sein.		
Wenn x zwischen 0 und 1 liegt, dann auch y.		
x ist größer als y.		
Die Beträge von x und y unterscheiden sich um 1.		
x ist der Kehrwert von y.		

b) Wenn für zwei Zahlen x und y gilt x · y = 1, welche Aussagen sind dann wahr und welche falsch? Kreuze an:

	wahr	falsch
Wenn x positiv ist, muss y negativ sein.		
Wenn x zwischen 0 und 1 liegt, dann auch y.		
x ist größer als y.		
Die Beträge von x und y unterscheiden sich um 1.		
x ist der Kehrwert von y.		

c) Wenn für zwei Zahlen x und y gilt x : y = 1, welche Aussagen sind dann wahr, welche falsch? Kreuze an.

	wahr	falsch
Wenn x positiv ist, muss y negativ sein.		
Wenn x zwischen 0 und 1 liegt, dann auch y.		
x ist größer als y.		
Die Beträge von x und y unterscheiden sich um 1.		
x ist der Kehrwert von y.		

2.6 Anforderungen der Universität

Fast alle Universitäten und Hochschulen beklagen heute mangelnde Kenntnisse und Fertigkeiten im Rechnen bei den Studienanfängern. Viele bieten deshalb ihren Studenten zunächst einen Selbsttest im Fach Mathematik an, den die weitaus meisten Studienanfänger nicht bestehen, auch weil sie gewohnt sind, mit Taschenrechnern zu rechnen, was hier verboten ist. Die Universität Braunschweig bietet folgenden Selbsttest an:

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung:

$$fx) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

1. Kreuzen Sie an, welcher der folgenden Bereiche der Definitionsbereich ist:

□ (1 , ∞)	□ (2 , ∞)	□ (-∞ , -2)
□ (0 , ∞)	□ (-∞ , -2) ∪ (2 , ∞)	□ [2 , ∞)
□ (-∞ , -2)	□ ∅ (leere Menge)	□ (-∞ , ∞)

2. Kreuzen Sie an, welcher der folgenden Bereiche der Wertebereich ist:

□ (1 , ∞)	□ (2 , ∞)	□ (-∞ , -2)
□ (0 , ∞)	□ (-∞ , -2) ∪ (2 , ∞)	□ [2 , ∞)
□ (-∞ , -2)	□ ∅ (leere Menge)	□ (-∞ , ∞)

3. Stellen Sie die folgende Gleichung nach *b* um:

$$b - c = \frac{b}{a}$$

4. Stellen Sie die folgende Gleichung nach *b* um:

$$5(a - 2b) - 4(a - b) = c$$

5. Bestimmen Sie die Lösung *x* der folgenden Gleichung:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$$

6. Bestimmen Sie die Lösung *y* der folgenden Gleichung:

$$y = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}$$

7. Lösen Sie die folgende Gleichung nach *a* auf:

$$c(a - b) + b(a - c) - a(b - c) = 0$$

8. Welchen Wert hat c in der folgenden Gleichung:

$$x + y = \sqrt{x^2 + c}$$

9. Stellen Sie die folgende Gleichung nach b um:

$$\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} = bc$$

10. Bestimmen Sie den Exponenten x in den folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$$

11. Bestimmen Sie x:

$$\sqrt[k]{a^{kn+m}} = a^x$$

12. Lösen Sie die folgende Gleichung nach y auf:

$$b^y = a^x$$

13. Lösen Sie die folgende Gleichung nach x *auf*:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{8x} = 3\boldsymbol{a}$$

14. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck für y soweit wie möglich durch Ausklammern aller gemeinsamen Faktoren:

$$y = 2^{3x+3} + 4^{2x+2} + 8^{x+1}$$

15. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

$$\boldsymbol{a}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}} = \sqrt{\boldsymbol{c}}$$

16. Bestimmen Sie x:

$$3 \cdot lg 2^{2x+1} + 2 \cdot lg 3^{3x+1} = lg\ 8$$

17. Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2+x}$$

18. $\lim_{x\to\infty} 2^{1+\frac{1}{x}}$

19. $\lim_{x\to\infty} a^{-x}$ für a > 0

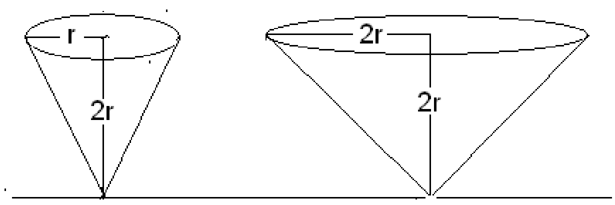
20. $\lim_{x\to 0} lnx$

21. $\lim_{x\to 0} e^x$

Kapitel 3: Aufgaben mit GTR und CAS

3.1 Modellieren

1. **(GTR/CAS)** Gegeben sind zwei Gefäße von der Form auf der Spitze stehender Kegel (Siehe Abb.):



Kegel A　　　　Kegel B

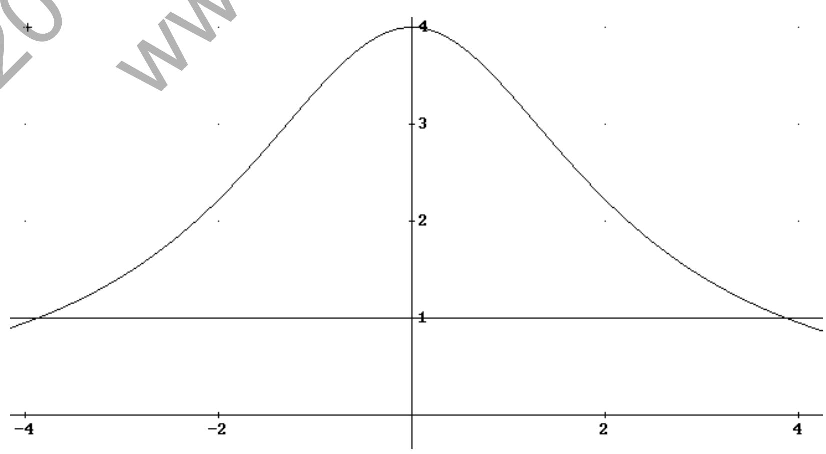
Kegel B ist zum Zeitpunkt t = 0 bereits mit 10 cm^3 Wasser gefüllt, während Kegel A noch leer ist. Beide Kegel werden gleichmäßig mit Wasser befüllt und zwar mit 1 cm^3 pro sec. Nach wie vielen Sekunden ist der Wasserstand in beiden Kegeln gleich hoch über der Spitze?

2. **(GTR/CAS)** Eine Firma stellt x Mengeneinheiten her, die sie für 50 Geldeinheiten pro Mengeneinheit an den Einzelhandel verkauft. In einem festen Zeitraum betragen die fixen Kosten 100 Geldeinheiten, und die variablen Kosten in Abhängigkeit von den Mengeneinheiten werden aus folgender Wertetabelle geschlossen: (Man nimmt an, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung handelt.)

Mengeneinheiten x	4	5	6	7
Produktionskosten (Geldeinheiten)	0	15	48	105

Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am größten?

3. **(CAS)** Die verglaste Stirnseite einer Dachgaube wird begrenzt von den Graphen der Funktionen g(x) = 1 und $f(x) = \frac{20}{x^2+5}$ (siehe Abb. auf der nächsten Seite; 1LE = 1 m):



Die Glasfläche wird in der Mitte von einem schmalen Steg (dessen Breite zu vernachlässigen ist) in zwei symmetrische Hälften geteilt, die der Glaser aus einer rechteckigen Platte mit den Kantenlängen 3 m und 4 m herausschneiden will. Ist dies möglich?

4. **(GTR/CAS)** Ein pensionierter Mathematiklehrer vertreibt sich die Zeit im Frühjahr bzw. zu Weihnachten mit der Aufzucht und dem Verkauf von Weihnachtsbäumen. Über die Jahre hin hat er einen Zusammenhang zwischen dem Preis *x* pro Baum und der Anzahl *f(x)* der (pro Tag) verkauften Weihnachtsbäume festgestellt, den er folgendermaßen mathematisch modelliert:

$$f(x) = \frac{192 - 2x}{x + 4}$$

a) Zeichne den Graphen dieser Funktion in einem Bereich, der aus dem Sachzusammenhang heraus sinnvoll erscheint. Welche Bedeutung haben in diesem Zusammenhang die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen? Welchen Preis muss der Pensionär festlegen, damit er pro Tag 20, 16 oder 8 Weihnachtsbäume verkauft?

b) Im Rahmen der Aufzucht eines Baumes entstehen Unkosten in Höhe von 5 € pro Baum.

Welchen Preis muss der Pensionär festlegen, damit sein Reingewinn maximal wird? Wie viele Bäume verkauft er dann und welchen Gewinn pro Tag erzielt er dann?

5. **(GTR/CAS)** Unter der Nachfragefunktion f (auch Preis-Absatz-Funktion) versteht man die Darstellung der Abhängigkeit nachgefragter Mengen von verschieden hohen Preisen x. Kurz: Die nachgefragte Menge f(x) ist eine Funktion des Preises x, d.h. von ihm abhängig. Normalerweise verläuft die Nachfragefunktion in der Weise, dass mit fallenden Preisen für ein Gut eine immer höhere Menge am Markt nachgefragt wird.

Ein Einzelhändler bestellt f(x) Elektromotoren beim Hersteller. Die Abhängigkeit der nachgefragten Menge vom Preis x (€) ist dabei gegeben durch die Nachfragefunktion

$$f(x) = \frac{1000 - 10x}{x + 10}$$

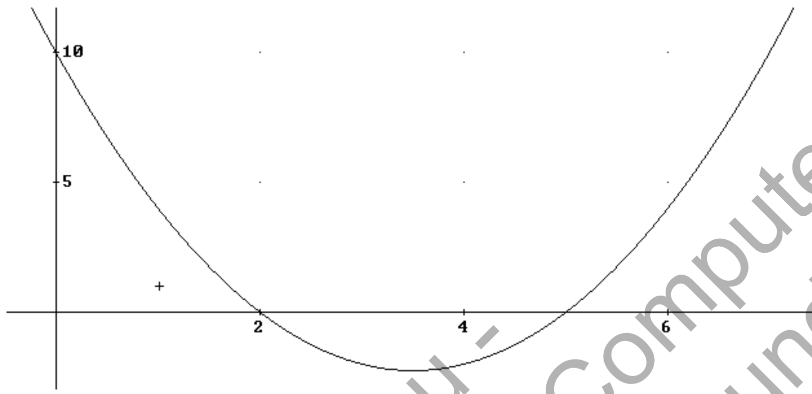
a) Zeichne den Graphen der Nachfragefunktion im ökonomisch sinnvollen Bereich. Welche Bedeutung haben dabei die Schnittpunkte mit den Achsen?

b) Die festen Kosten für die Herstellung eines Elektromotors betragen 50 (€). Wie wählt der Hersteller seinen Verkaufspreis pro Stück, wenn er seinen Gewinn bei dieser einen Bestellung maximieren will?

c) Wie viele Elektromotoren werden dann bestellt, und welchen Reingewinn hat der Hersteller?

3.2 Analysis

1. **(GTR/CAS)** Von einer Polynomfunktion 3. Grades g ist der Graph der ersten Ableitung g' gegeben:



a) In welchen Bereichen ist der Graph von g monoton steigend?

b) In welchen Bereichen ist der Graph von g rechtsgekrümmt?

c) Bestimme die Funktionsgleichung von g, wenn (5/0) ein Punkt des Graphen von g ist.

2. **(GTR/CAS)** Vergleiche die Graphen von $f(x) = \frac{\sin(x+0{,}0000001)-sinx}{0{,}0000001}$

und g(x) = cos x. Was ist festzustellen? Welche Erklärung gibt es dafür?

3. **(GTR/CAS)** Euler hat die nach ihm benannte Eulersche Zahl e ≈ 2,71828… so definiert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
.

Bestimme a und b in folgenden Gleichungen:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{x+1} = a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h} = 1$$

4. **(GTR/CAS)** Beschreibe die Graphen der Funktionen f(x) = $(x + 2)^2 + 2$ und g(x) = $-(2-x)^2 - 2$ hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Beziehung zueinander.

5. **(GTR/CAS)** Wie lauten die Gleichungen aller Geraden durch den Punkt (1/2)?

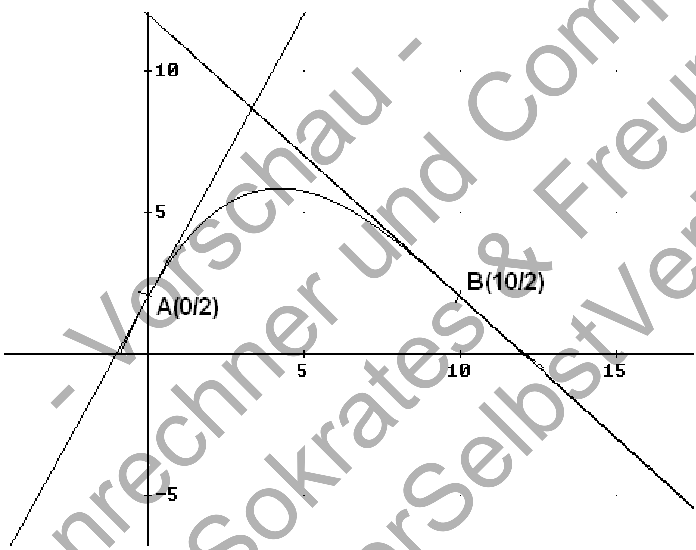
6. **(GTR/CAS)** Die Ableitung von $y = a^x$ gilt als unbekannt und darf nicht der Formelsammlung entnommen oder von CAS bestimmt werden.

   a) Bestimme jeweils die Steigung der Graphen von $y = 2^x$ *und* $y = 3^x$ an der Stelle x=0. Hinweis: Verwende den Differenzenquotienten wie in Aufgabe 2.

   b) Bestimme *a* so, dass der Graph von $y = a^x$ im Punkt P(0/1) die Steigung 1 hat.

   Hinweis: Verwende den Ansatz $a^x = x + 1$. Begründe auch, warum dieser Ansatz sinnvoll ist.

7. **(GTR/CAS)**



An der Kreuzung zweier Autobahnen, dargestellt durch die Geraden y = 2x + 2 und y = -x +12, soll eine Spur für Abbieger gebaut werden, die in A und B tangential in die Autobahn einmündet. Das Kurvenstück zwischen A und B soll mathematisch beschrieben werden. Nenne drei Alternativen und gib eine davon in Form einer Funktionsgleichung an.

3.3 Mittelstufe

1. **(GTR/CAS)** Gegeben ist ein zylindrisches Gefäß mit dem Radius der Grundfläche r = 4 cm und der Höhe h = 10 cm.

   a) Das nach oben offene Gefäß steht mit seiner kreisförmigen Grundfläche auf einer ebenen Unterlage bei starkem Regen im Freien. Durch den Starkregen wurde das Gefäß mit einer Wassersäule der Höhe 5 cm gefüllt. Wie viele Liter Regen sind dann pro m^2 gefallen?

3.5 Vektorgeometrie

Aufgaben der Vektorgeometrie können mit CAS oder den meisten GTR gelöst werden. Der Einsatz lohnt sich allerdings nicht in jedem Falle.

1. Gegeben sind die Punkte A(1/2/3), B(1/7/3), C(4/7/7), D(4/2/7) und L(6/2,5/6).

   a) Zeige, dass ABCD ein Quadrat ist.

   b) Bestimme das Volumen der quadratischen Pyramide ABCDL.

   c) Bezüglich der punktförmigen Lichtquelle L wirft das Quadrat ABCD einen Schatten in der x-y-Ebene. Bestimme den Flächeninhalt des Schattens.

2. Für feste Zahlen a, b, c sind drei Ebenen gegeben:

   E_1 $x + 2y - 3z = 21$

   E_2 $x + y + a \cdot z = 12$

   E_3 $5x + b \cdot y + c \cdot z = 21$

   a) Wähle a so, dass der Punkt (1/7/-2) auf der Schnittgeraden von E_1 und E_2 liegt.

   b) Wähle a, b, c so, dass sich E_2 und E_3 nicht schneiden.

   c) Wähle a, b, c so, dass sich E_1, E_2 und E_3 im Punkt (8/5/-1) schneiden.

3. A(0/0/0), B(4/0/0), C(4/4/0), D(0/4/0), E(0/0/4), F(4/0/4), G(4/4/4), H(0/4/4) seien die Eckpunkte eines Würfels und M sei der Mittelpunkt der Raumdiagonale AG. E sei eine Ebene, auf welcher der Punkt M liegt und auf welcher die Raumdiagonale AG senkrecht steht. Der Würfel werde entlang der Ebene E durchgeschnitten. Nenne die Seitenlängen und Innenwinkel der entstehenden Schnittfläche.

3.6 Stochastik

1. **(GTR/CAS)** Saat-Bohnen werden in zwei Qualitäten in Tütchen zu je 10 Bohnen verpackt. Von Sorte A keimt 60 % aller Samenkörner, von Sorte B keimt 70 % aller Samenkörner. Ein Einzelhändler hat 40 Tütchen zu je 10 Bohnen der Sorte B beim Großhändler bestellt, behauptet aber, Sorte A bekommen zu haben. Er will 3 Tütchen aussäen und sagt: Wenn weniger als 20 Keimlinge entstehen, habe ich die falsche Sorte bekommen.

   a) Lässt sich der Großhändler auf diesen Test ein? Begründe.

   b) Wie groß ist für jeden der Beteiligten die Irrtumswahrscheinlichkeit, wenn man den Test so durchführt?

c) Wie viele Tütchen müssen für den Test ausgesät werden, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit für den Einzelhändler unter 20 % fällt?

2. **(GTR/CAS)** Ernie und Bert besuchen auf dem Rummelplatz einen Stand, an dem man Dosen umwerfen muss. Bert behauptet, beim Dosenwerfen sei seine Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$. Angenommen Bert hat Recht…

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bert bei 10 Würfen 5 Treffer hat?

   b) Drei Würfe kosten 1 Euro. Bei einem Treffer erhält man 1 Euro. Bert kauft drei Würfe. Fülle die folgende Wertetabelle aus und berechne die Erwartungswerte(nämlich die Treffererwartung aus Zeilen 1 und 2 der Wertetabelle und die Gewinnerwartung aus Zeilen 2 und 3 der Wertetabelle):

Anzahl Treffer x	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit P(x)				
Berts Gewinn(+)/Verlust(-)				

3. **(GTR/CAS)** Um die Anzahl der Forellen in einem großen Teich zu schätzen, werden 200 Forellen gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. Nachdem sich die markierten Forellen gut unter die übrigen gemischt haben, werden 150 von ihnen gefangen. 35 der Gefangenen sind markiert. In welchem Intervall liegt die Anzahl der Forellen im Teich mit 66%iger Wahrscheinlichkeit?

4. **(GTR/CAS)** Von einem Busch werden wahllos 75 Blätter abgepflückt und (gerundet auf ganze cm) gemessen. Es ergibt sich folgende absolute Häufigkeitsverteilung:

Blattlänge (cm gerundet)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Anzahl Blätter mit dieser Länge	1	3	5	6	8	10	10	9	8	6	4	3	2

   a) Bestimme den Mittelwert m und die Stichprobenstreuung s dieser Häufigkeitsverteilung auf eine Stelle hinter dem Komma genau.

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eine zufällig ausgewählte Blattlänge weniger als s von m entfernt?

5. **(GTR/CAS)** Die 64 Schülerinnen und Schüler einer Jahrgangsstufe 12 haben eine Vergleichsarbeit mit folgendem Notenspiegel geschrieben:

Notenpunkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Anzahl Schüler	0	0	0	1	2	6	10	11	12	11	7	2	2	0	0	0