Ursula Pirkl

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

LEHRER SELBST VERLAG
02-030-251

Lehrerselbstverlag
Sokrates & Freunde GmbH, Koblenz (Germany) 2013
www.LehrerSelbstVerlag.de

Druck: www.f-druck.de

Vorwort

Die Basis für die Entwicklung des vorliegenden Arbeitshefts zum Thema Integralrechnung bilden meine langjährigen Erfahrungen im Unterricht an Oberstufen von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Vor allem die heterogene Zusammensetzung in Klassen mit Schülerinnen und Schülern, die in ihrem Bildungsgang zuvor die unterschiedlichsten Schulformen besucht haben, stellen hohe und vielschichtige Herausforderungen an die Gestaltung von Unterricht. Das bildungspolitische Ziel, das Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife für Schülerinnen und Schüler unabhängig von ihrer bisher erreichten Kompetenz zu ermöglichen, setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler dort abgeholt werden, wo sie sich befinden. Meine über mehrere Jahre hinweg entwickelten Arbeitsmaterialien für die Themenbereiche der Oberstufe sind darauf ausgerichtet, diesen Bedürfnissen zu entsprechen. Erzielte Ergebnisse meiner Schülerinnen und Schüler im Landesabitur Hessen bestätigen, dass der eingeschlagene Weg erfolgreich ist. Es ist daher geplant, auch zu weiteren Themen der Oberstufenmathematik Arbeitshefte herauszugeben.

Nachdem mir immer wieder aufgefallen ist, dass viele meiner Schülerinnen und Schüler mit der Komplexität der Zusammenhänge bei der Integralrechnung Schwierigkeiten hatten, und selbst bei einfachen Flächenberechnungen vor Problemen standen, wurde von mir nach neuen Wegen gesucht, die den Zugang zu diesem Thema erleichtern. Als Ergebnis ist dieses, auch von Kollegen und Kolleginnen erprobte Unterrichtskonzept entstanden, mit dem in der Regel sogar Schülerinnen und Schüler erfolgreich einen Weg zum Thema Integralrechnung finden, die von sich selbst behaupten, Mathematik nicht zu verstehen. Durch den hier gewählten Einstieg besteht die Möglichkeit, die neu zu erlernenden mathematischen Verfahren mit den bereits bekannten Methoden der Flächenberechnung zu verknüpfen und sich schrittweise selbst zu erarbeiten. Damit wird den Erkenntnissen der Lerntheorie und der Forderung nach selbstorganisierten Lernformen (SOL) Rechnung getragen und die Zielsetzung der Kompetenzerweiterung erlangt.

Eigene Erfahrung mit dem Einsatz der Unterlagen zeigen, dass sich häufig bereits schon bei der Bearbeitung der ersten Seiten motivierende Erfolgserlebnisse einstellen, welche oft die gesamte Einstellung zum Fach Mathematik nachhaltig positiv beeinflussen. Letztendlich haben der Wunsch meiner Schülerinnen und Schüler sowie auch von Kollegen und Kolleginnen und entsprechende Anfragen aus Kursen, die nicht von mir unterrichtet wurden, den Anstoß gegeben, zum Thema Integralrechnung dieses Arbeitsheft in gebundener Form herauszugeben.

Ursula Pirkl

Kommentare von Schülerinnen und Schülern:

„Es hat richtig Spaß gemacht, mit Ihren Unterlagen zu arbeiten. Ich habe alles verstanden, weil man sich das Thema in ganz kleinen Schritten selbst erarbeiten konnte und am Schluss sogar die Aufgaben im Schulbuch ohne Probleme lösen konnte.“

„Ich war immer schlecht in Mathematik und hatte in der Mittelstufe oft eine Fünf. Seit ich mit Ihren Unterlagen arbeite, erkenne ich Strukturen, kann immer wieder zurückblättern und nachlesen, verstehe Mathematik und schreibe gute Noten.“

Zielgruppe

Die Unterlagen beinhalten für die Abiturprüfung in Hessen grundlegende Themen aus dem Bereich der Integralrechnung für Grund- und Leistungskurs und können in der gymnasialen Oberstufe sowie an Fachoberschulen und Einrichtungen, in denen die Allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden. Das Konzept des selbstorganisierten Lernens ermöglicht auch angehenden Studentinnen und Studenten zur Vorbereitung auf einen Studiengang, der Mathematik beinhaltet, ihre Kenntnisse zum Thema Integralrechnung aufzuarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik ist der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vorzüglich geeignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse Zielgruppe „Zugangsproblem in Mathematik“ voll abdeckt.

Methodische und didaktische Anmerkungen

Die Unterlagen sind darauf ausgerichtet, dass die Schülerinnen und Schüler weitgehend eigenständig und individuell in Lernteams und zu Hause die einzelnen Themen erarbeiten sowie bei Fehlzeiten auch nacharbeiten können. Über Hausaufgaben kann der zeitliche Rahmen so gesteuert werden, dass 20 Stunden für den Abschnitt Einführung in die Integralrechnung nicht überschritten werden. Als Lehrkraft ermöglichen mir die Unterlagen mittlerweile die Vorbereitung auf den Unterricht so zu gestalten, dass ich überwiegend die Rolle eines Lerncoachs wahrnehmen kann. Während leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die Themen in der Regel völlig selbstständig erarbeiten, kann ich bei Bedarf individuelle Unterstützung anbieten. Zu Beginn der Stunden erfolgt eine inhaltsorientierte, fachliche Einführung bzw. die gemeinsame Wiederholung zur Festigung der bisher gewonnenen Erkenntnisse und somit die Erweiterung der Kompetenz des Einzelnen.

Die Unterlagen sind so gestaltet, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse vollständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben werden, sodass keine unübersichtlichen losen Blättersammlungen entstehen und alle Informationen ohne Suchaktionen schnell nachgeschlagen werden können. Die vollständigen Lösungen werden als Download zur Verfügung gestellt. Da die Unterlagen ergänzend zum Schulbuch eingesetzt werden, sind an Stellen, an denen beispielsweise weitere Vertiefungen durch Übungsaufgaben gewünscht sind, Platzhalter so eingefügt, dass Verweise der Lehrerinnen und Lehrer auf Aufgaben im Schulbuch übersichtlich notiert werden können. Weiteren Anregungen und Verbesserungswünschen werden gerne auf Umsetzbarkeit überprüft.

Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln

Einführung in die Integralrechnung:
Kapitel 1 bis 5:

Der Teil Einführung in die Integralrechung stellt ein in sich geschlossenes Unterrichtskonzept dar. Die einzelnen Kapitel bauen aufeinander auf und sollten daher in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. In Kapitel 1 bis 3 werden anhand der Betrachtung von Flächenstücken bei linearen Funktionen, ohne Verwendung des Begriffes Integral, alle Eigenschaften der Stammfunktion hinsichtlich von Flächenberechnungen im Koordinatensystem erarbeitet. Die hier zu berücksichtigenden Regeln bleiben für die Schülerinnen und Schüler überschaubar, da eine Entkopplung vom Regelwerk für die Integralrechnung die oben beschriebene Reduktion der Komplexität bewirkt.

In Kapitel 4 erfolgt unter Verwendung der nun bereits bekannten Stammfunktion ein einfach nachvollziehbarer und anschaulicher Übergang zum Begriff Integral. Die formale Herleitung der Stammfunktion von $f(x) = x^2$ über Grenzwertbildung ist für das Gesamtverständnis nicht notwendig und kann im Grundkurs übersprungen werden. Auch die Betrachtungen zum funktionalen Charakter der Stammfunktion sind optional und können zur Binnendifferenzierung in heterogenen Lerngruppen herangezogen werden.

Die umfangreichen Betrachtungen an Geraden kosten zwar zu Beginn der Unterrichtsreihe etwas mehr Zeit als der klassische direkte Einstieg über die Grenzwertbildung von Ober- oder Untersumme. Das gleicht sich jedoch wieder aus, da die Schülerinnen und Schüler die Rechenregeln für die Integralrechnung als Ergänzung zu den Regeln für den Umgang mit der Stammfunktion sehen, Begriffe klar trennen können und am Ende von Kapitel 5 ohne Probleme in der Lage sind, die vorgegebenen Standardaufgaben zur Flächenberechnung selbstständig zu lösen.

Anwendung der Integralrechnung:
Kapitel 6 bis 10

Im Abschnitt Anwendung der Integralrechnung findet sich eine Sammlung von Arbeitsblättern zur Einführung in abiturrelevante Standardthemen der Integralrechnung. Die Aufgabenstellung in Kapitel 6 knüpft dabei an das Beispiel zur Berechnung der Arbeit aus den Vorbemerkungen an, wobei die Bedeutung von Flächen im Sachzusammenhang einer Aufgabenstellung für weitere Beispiele erläutert wird.

Weiterführung der Intergralrechnung:
Kapitel 11 bis 15

Die Regel für die lineare Substitution wird zunächst für den Grundkurs intuitiv an Beispielen plausibel gemacht. Als erweiternde Betrachtung erfolgt an einem Beispiel auch die Erarbeitung des ausführlichen Substitutionsverfahrens bei der linearen Substitution. Die Ausführungen zur e-Funktion setzten die Kenntnis von Ableitungsregeln bei der e-Funktion voraus und können daher erst nach der Einführung in die e-Funktionen bearbeitet werden.

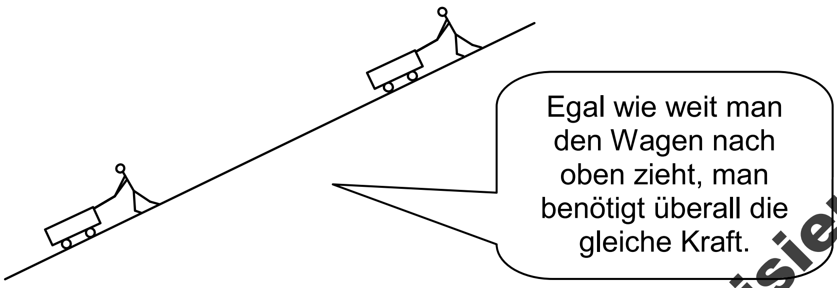
Eine Behandlung des Substitutionsverfahrens auch für nicht lineare innere Funktionen und die partielle Integration dürfte dem Leistungskurs vorbehalten sein bzw. als Vorbereitung auf das Studium dienen. In beiden Kapiteln werden die jeweiligen Integrationsverfahren anhand von Standardfunktionen mithilfe von Beispielen erklärt bzw. erarbeitet. Auf komplizierte Verfahren, die trickreiche Substitutionen verlangen oder die mehreren Stufen bei der Integration bzw. beide Integrationsverfahren benötigen, wird nicht eingegangen. Die Reihenfolge von Kapitel 12 und 13 ist daher beliebig.

Integrationsverfahren bei e-Funktionen und die logarithmische Integration in Kapitel 14 und 15 kann erst nach der Behandlung der entsprechenden Ableitungsregeln erfolgen.

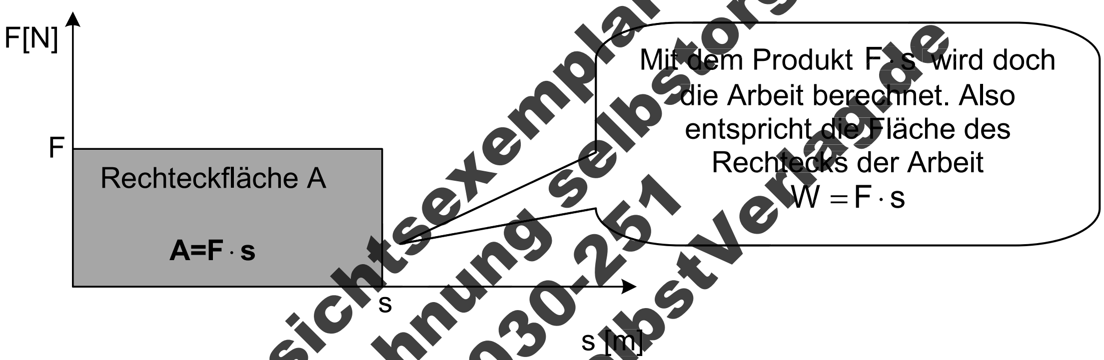
Vorbetrachtungen

Wie Sie sicherlich bereits aus dem Physikunterricht der Klasse 11 wissen, können die Flächen zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse eine inhaltliche Bedeutung haben. Dies soll nun am Beispiel der Berechnung der Arbeit noch einmal kurz dargestellt werden.

1. Arbeit bei konstanter Kraft

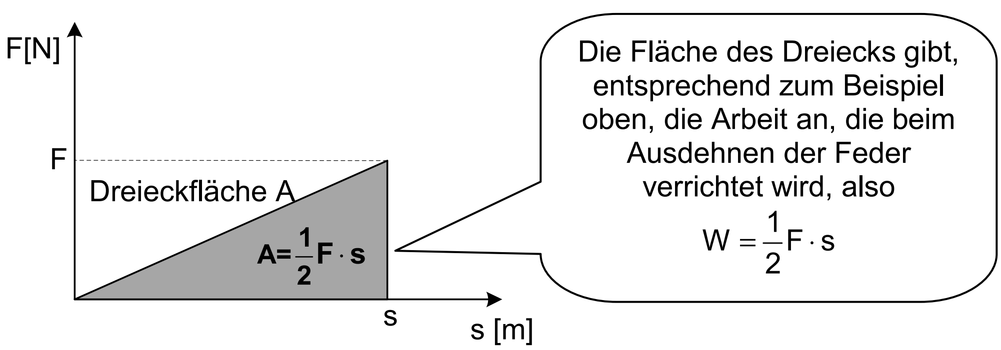


Diesen Sachverhalt kann man in einem F,s-Diagramm wie folgt darstellen:



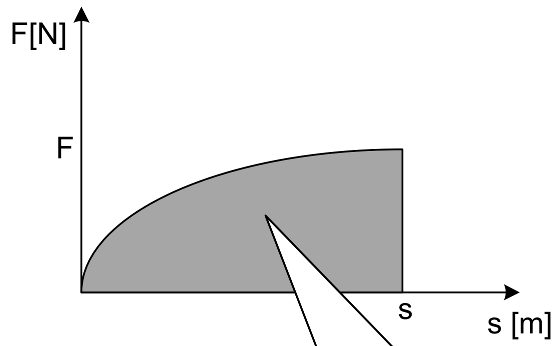
2. Arbeit bei zunehmender Kraft

Bei einer Feder sieht das zugehörige F,s-Diagramm wie folgt aus:



3. Arbeit bei sich beliebig ändernder Kraft

In diesem Fall könnte ein F,s-Diagramm so aussehen:



Für die Berechnung dieser Fläche kennen Sie aus dem bisherigen Mathematikunterricht keine Formel. Fazit:

Wir brauchen neue mathematische Berechnungsmethoden für Flächen!

Zielsetzung:

Mit diesem Arbeitspapier soll nun eine neue Berechnungsmethode erarbeitet werden, mit der man Flächen berechen kann, die in einem Koordinatensystem dargestellt werden können und die keine geraden Ränder als Begrenzung haben.

Bevor jedoch die eigentliche Aufgabenstellung in Angriff genommen wird, sollen zunächst noch für das Verständnis der Vorgehensweise grundlegende mathematische Vorraussetzungen wiederholt werden.

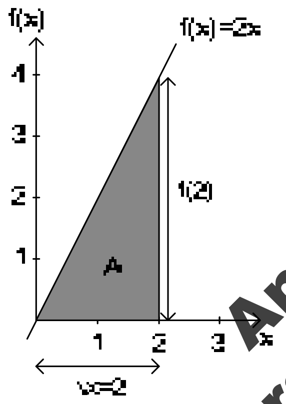
4. Mathematische Voraussetzungen

Abweichend von Ihrem Schulbuch werden in diesem Arbeitspapier zunächst noch keine Flächen betrachtet, bei denen die Begrenzung durch eine Kurve beschrieben wird. Alle notwendigen Erkenntnisse werden hier zunächst anhand von Flächen erarbeitet, die man auch mit den Formeln für Rechtecke, Dreiecke und Trapeze, also elementargeometrischen Betrachtungen, berechnen kann. Das hat den Vorteil, dass viele Ergebnisse mit bereits bekannten Methoden überprüft werden können und somit das Verständnis für die nun neu zu erlernenden Verfahren der Flächenberechnung erleichtert wird.

Wiederholung von Flächenberechnungen im Koordinatensystem:

a) Dreiecke im Koordinatensystem

Im folgenden Koordinatensystem ist ein Dreieck so eingezeichnet, dass eine Seite auf der x-Achse liegt. Diese auf der x-Achse liegende Seite wird als Grundseite g gewählt und hat wie bei einem Steigungsdreieck die Länge Δx, hier somit $\Delta x = 2$ LE (Längeneinheiten). Die Höhe des Dreiecks entspricht hier dem Funktionswert der Geraden $f(x) = 2x$ an der Stelle $x = 2$ also $f(2) = 4$ LE.



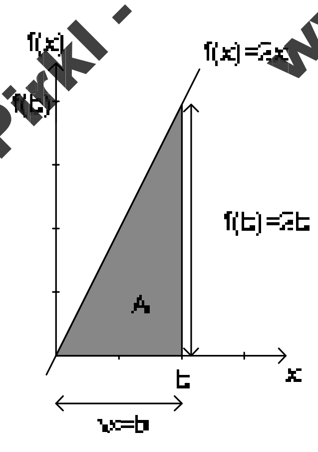
Da hier die Beschriftung mit Zahlenwerten vorgegeben ist, ergibt sich für die Fläche:

Fläche des Dreiecks A:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{2 \cdot f(2)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,\text{FE}$$

(FE bedeutet Flächeneinheiten)

Verallgemeinert man diese Betrachtung für ein Koordinatensystem, dessen Achsen nicht mehr mit Zahlen beschriftet sind, folgt:



Erläutern Sie, warum man für f(b) den Wert 2b einsetzt, indem Sie den folgenden Satz ergänzen:

f(b) ist der Funktionswert an der Stelle x = ____ und

dieser wird berechnet, indem man b in die

__________________________ der eingezeichneten

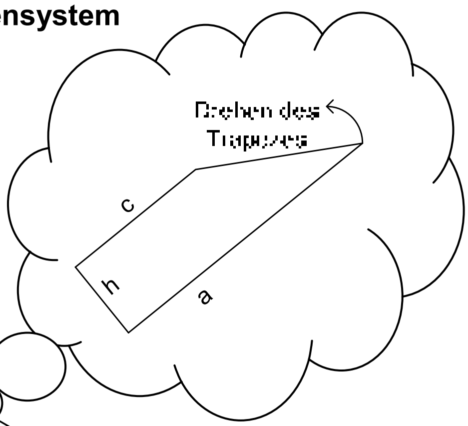
Geraden einsetzt.

Fläche des Dreiecks A:

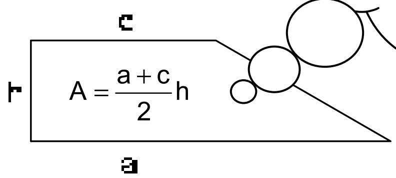
$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{b \cdot f(b)}{2} = \frac{b \cdot 2b}{2} = b^2$$

Anmerkung: Wenn Sie für b nun den oben verwendeten Wert 2 einsetzen erhalten Sie wie oben für die Fläche den Wert 4 FE.

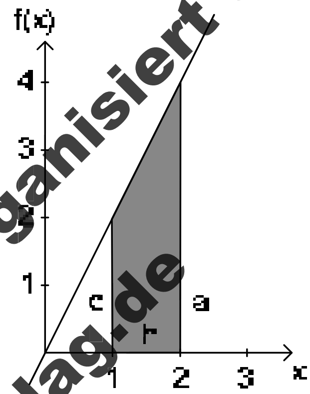
b) Trapeze im Koordinatensystem



Fläche eines Trapezes laut Formelsammlung:



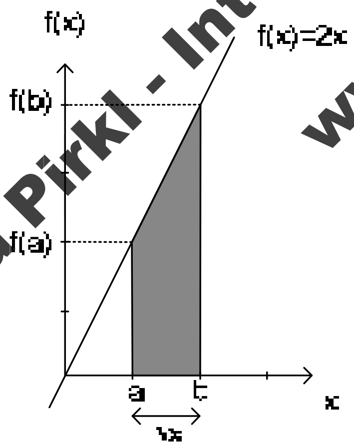
Um 90° gedrehtes Trapez im Koordinatensystem.



Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Flächeninhalt des Trapezes im abgebildeten Koordinatensystem einen Betrag von A = 3FE hat.

Raum für Rechnung:

Überträgt man die Überlegungen für das Dreieck im nicht mit Zahlen skalierten Koordinatensystem auf das Trapez, ergibt sich die folgende Abbildung:



Begründen Sie, ggf. durch entsprechende Rechnung, dass sich für die Fläche des Trapezes im Koordinatensystem die Formel

$$A = \frac{f(a) + f(b)}{2}\Delta x$$

ergibt.

Raum für Begründung:

Kapitel 1: Rand- und Flächeninhaltsfunktion

In diesem Kapitel werden anhand aufeinander aufbauender Aufgaben grundlegende Zusammenhänge hinsichtlich der neuen Methode, Flächen zu berechnen, erarbeitet. Überspringen Sie daher keine Aufgabe. Sollten Sie sich hinsichtlich Ihrer Lösung nicht sicher sein, so sind zum Teil Kontrollergebnisse angegeben und Sie finden zum Vergleichen Ergebnisse im Anhang.

Neue Bezeichnungen und Schreibweisen

Auf den nun folgenden Seiten wird der Begriff Randfunktion verwendet und Flächen nicht nur mit dem Buchstaben A sondern in der Schreibweise $A_0(b)$ angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Bedeutung.

- **Randfunktion:**

  Die Randfunktion stellt jeweils die obere Begrenzung der in den Abbildungen dargestellten Flächen dar.

- **Flächenangabe mit Grenzen:**

  Bisher wurde für die Fläche nur der Großbuchstabe A verwendet. Im Folgenden wird diese Schreibweise ergänzt. Beispielsweise bedeutet $A_0(4)$ [sprich: A von Null bis vier] in der Aufgabe 1.1, dass die Fläche bei x = 0 links an der y-Achse, der sogenannten **unteren Grenze,** beginnt und rechts an der senkrechten Gerade x = 4, der sogenannten **oberen Grenze,** endet. Erläutern Sie, welche Bedeutung die Angabe $A_0(b)$ hat:

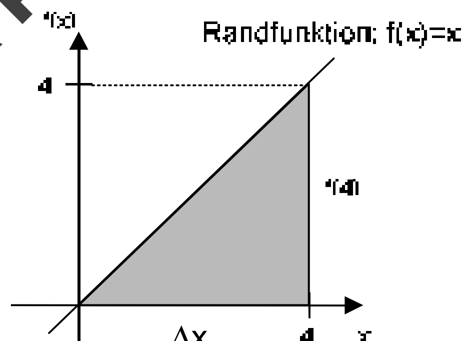
  ____

  ____

1. Der Begriff der Flächeninhaltsfunktion

Aufgabe 1.1

a) Berechnen Sie die markierte Fläche mithilfe von elementargeometrischen Mitteln, also mit der Ihnen bekannten Formel für die Fläche eines Dreiecks. Bestimmen Sie dazu die Zahlenwerte von Δx und f(4) mithilfe der Angabe zur Randfunktion und der Abbildung.



Formel Dreiecksfläche: $A = \frac{gh}{2}$

Grundseite: $g = \Delta x =$__________

Höhe: $h = f(4) =$__________

Fläche zwischen 0 und 4: $A_0(4) =$ __

Kapitel 2: Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion

In der nun folgenden Aufgabe soll die Berechnung von Flächen, die links nicht an der y-Achse beginnen, untersucht werden.

1. Flächen, die nicht an der y-Achse beginnen

Aufgabe 2.1

Gegeben ist die Randfunktion $f(x) = x+1$

a) Bestimmen Sie die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ sowie die weiteren angegebenen Flächen. Berechnen Sie für die Randfunktion f mithilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ die folgenden Flächen:

$A_0(x) =$ ____________________

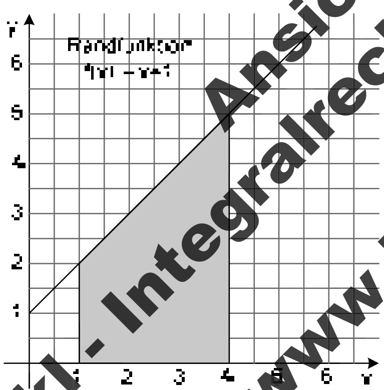
$A_0(1) =$ ____

$A_0(4) =$ ____

$A_0(5) =$ ____

b) Mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe a) sollen nun die in den folgenden Aufgaben i) bis iv) grau markierten Flächen berechnet werden.

i) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

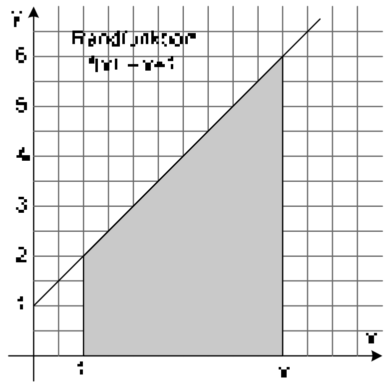
linke Grenze: a = ______

rechte Grenze: b = ______

Erläuterung:

(1) $A_1(4) = A_0(4) - A_0(1)$	(1)____
	____
	____
	____
(2) $A_1(4) = 12 - 1{,}5$	(2)____
	____
(3) $A_1(4) = 10{,}5$ FE	(3)____

ii) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: a = _____

rechte Grenze: b = _____

Erläuterung:

(1) $A_1(x) = A_0(x) - A_0(1)$

(1) ____

____

____

(2) $A_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}5$

(2) ____

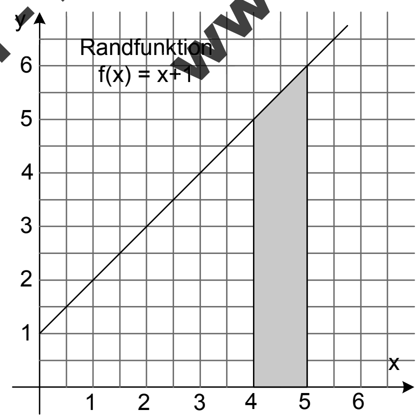
____

(3) $A_1'(x) = x+1$

(3) ____

____

iii) Berechnen Sie nun die Fläche $A_4(5)$ entsprechend zu den Zeilen (1) bis (3) dieser Aufgabe unter i).



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: a = _____

rechte Grenze: b = _____

$A_4(5) = A_{\_}(\_\_) - A_{\_}(\_\_)$

$A_4(5) =$ ____

$A_4(5) =$ ____

Kapitel 3: Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion

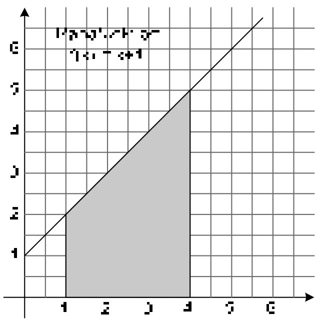
Bisher wurden die Flächen zwischen einer Geraden und der x-Achse mithilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$ berechnet. Nun soll das Verfahren verallgemeinert werden, indem die Stammfunktion zur Berechnung von Flächen herangezogen wird.

1. Grundlegende Betrachtung zur Flächenberechnung mit der Stammfunktion

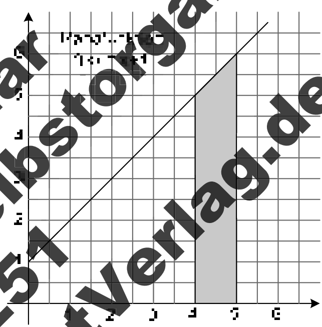
Zunächst soll im folgenden Beispiel geklärt werden, wie man mit einer Stammfunktion eine Fläche berechnen kann und wie die Konstante c in die Rechnung einfließt. Erläutern bzw. ergänzen Sie dazu die Angaben unten.

Rückblick:

Im Kapitel 2 wurden für die Randfunktion f(x) = x + 1 mithilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ die folgenden Flächen berechnet:



$A_1(4) = 10{,}5$ FE



$A_4(5) = 5{,}5$ FE

Nun sollen diese Flächen unter Anwendung der Stammfunktion erneut berechnet und die bereits bekannten Ergebnisse als Vergleich herangezogen werden.

F(x) =	$A_0(x) + c =$	$\frac{1}{2}x^2 + x + c$	Ermitteln der allgemeinen Stammfunktion mit Konstante c aus der Flächeninhaltsfunktion
F(0) =	$A_0(0) + c =$	0 + 0 + c = c	Berechnen der Stammfunktion für x = ____
F(1) =	$A_0(1) + c =$	0,5 + 1+ c = 1,5 + c	Berechnen der Stammfunktion für x = ____
F(4) =	$A_0(4) + c =$	8 + 4 + c = _____ + c	Berechnen der Stammfunktion für x = ____
F(5) =	$A_0(5) + c =$	12,5 + 5 + c = __________	Berechnen der Stammfunktion für x = ____

Berechnen Sie nun die folgenden Differenzen (beachten Sie, dass bei der Subtraktion von Summen Klammern gesetzt werden müssen) und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den im Rückblick oben dargestellten Flächen.

a) F(4) – F(1) =

b) F(5) – F(4) =

c) Vergleich:

Die über die Bildung der Differenzen F(4) – F(1) und F(5) – F(4) berechneten Zahlenwerte sind

___________________________ mit den Zahlenwerten für die oben berechneten Fläche.

Folgerung aus dem Vergleich:

Mit der Differenz F(4) – F(1) berechnet man für die Randfunktion f(x) die Fläche zwischen

___________ und mit der Differenz F(5) – F(4) berechnet man für die Randfunktion f(x) die

Fläche zwischen _____________.

d) Was stellen Sie bei der Rechnung in a) und b) bezüglich der Konstanten fest?

____

____

Folgerung aus der Feststellung:

Merke

Die Konstante c ist Bestandteil einer Stammfunktion F(x). Da die Konstante bei der Berechnung von Flächen zwischen jeweils gegebener linker bzw. unterer und rechter bzw. oberer Grenzen jedoch keine Rolle spielt, kann man sie bei Rechnungen vernachlässigen.

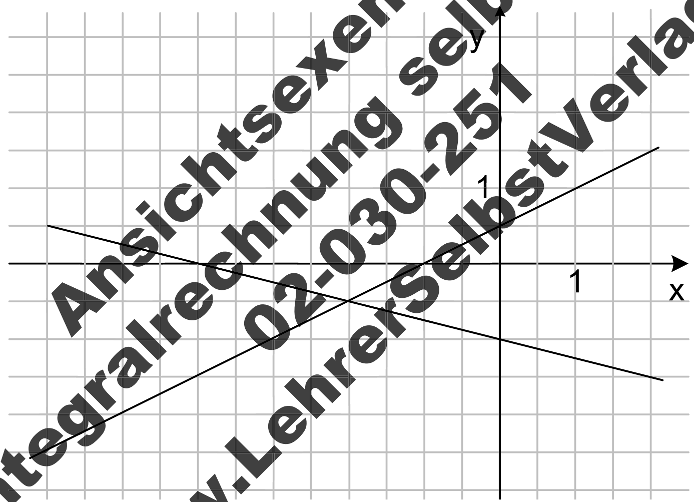
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei linearen Funktionen

Wenn man die Fläche zwischen zwei Funktionen mithilfe der Differenzenfunktion h(x) berechnet, spielt es ___________ Rolle, ob die Flächen vollständig ober- oder unterhalb oder teilweise ober- oder unterhalb der ___-Achse verlaufen.

8. Berechnung von Flächen zwischen zwei sich schneidenden Geraden

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Markieren Sie zwischen den Grenzen a = – 4 und b = 0 die Flächen zwischen den beiden Geraden.



a) Sie haben gelernt, dass man die Fläche zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) mithilfe der Differenzenfunktion h(x) ermitteln kann. Erläutern Sie, warum man in der folgenden Rechnung für die Fläche das falsche Ergebnis 0FE erhält:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x - 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$A_{-4}(0) = [H(x)]_{-4}^{0} = \left[-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-4}^{0} = 0 - \left(-\frac{3 \cdot 16}{8} + \frac{3 \cdot 4}{2}\right) = 0 - (-6 + 6) = 0FE$$

____

____

____

____

Kapitel 4: Flächen unter Kurven

Nachdem Sie gelernt haben, dass man bei Geraden als Randfunktion mithilfe der Stammfunktion die Fläche berechnen kann, die zwischen einer Gerade g(x) und der x-Achse sowie zwei senkrechten Geraden liegt, welche die untere Grenze x = a und die obere Grenze x = b bilden, sollen diese Kenntnisse nun für nicht lineare Randfunktionen, d.h. Kurven, erweitert werden. Dafür wird zunächst die möglichst einfache Randfunktion $f(x) = x^2$ betrachtet.

1. Formulieren einer Hypothese

In der Abbildung ist die Randfunktion $f(x) = x^2$ dargestellt. Formulieren Sie unter Verwendung Ihrer Kenntnisse hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Randfunktion und Stammfunktion eine Hypothese über die Berechnung der grau markierten Fläche.

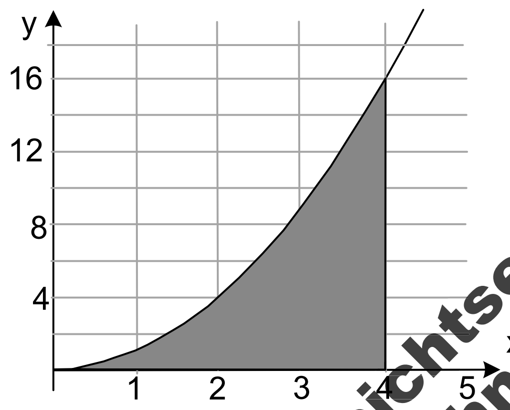


Abb. 4.1

Hypothese:

Aus den Überlegungen zur Berechnung von Flächen unter Geraden kann man für die markierte Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ die folgende Vermutung über eine Stammfunktion ableiten:

Stammfunktion von f(x): F(x) = __________

2. Berechnen der Fläche unter Annahme der Hypothese

Berechnen Sie den markierten Flächeninhalt, also der Fläche zwischen der Randfunktion f(x), der x-Achse, der unteren Grenze a = 0 und der oberen Grenze b = 4 aufgrund Ihrer Hypothese mit der vermuteten Stammfunktion:

Flächeninhalt von a = 0 bis b = 4: $A_0(4) = [\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ ]_0^4$

$A_0(4) =$ ____

Vermutung über den Flächeninhalt: $A_0(4) =$ ______FE

3. Nachweis zur Gültigkeit der Hypothese

Um die Gültigkeit der oben erstellten Hypothese zu untersuchen, geht man wie folgt vor: Die gesuchte Fläche wird zunächst durch treppenförmig angeordnete Rechtecke bzw. Balken oder Trapeze angenähert. Liegen die Rechtecke über der Randfunktion, so bezeichnet man die Summe aller Rechteckflächen als Obersumme O. Liegen die Rechteckflächen unterhalb der Randfunktion, so bezeichnet man die Summe aller Rechteckflächen als Untersumme U. Berechnen Sie nun in Aufgabe a) und b) die Fläche der jeweils abgebildeten Rechtecke bzw. in Aufgabe c) die Fläche der eingezeichneten Trapeze sowie die Summe aller Rechteck- und Trapezflächen.

a) Annäherung der Fläche über die Bildung der Obersumme O mit Balken

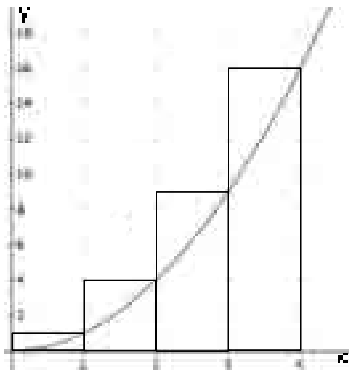


Abb.4.3.1

Berechnung der Rechteckflächen:

$O_0(1)$ = ______________________________

$O_1(2)$ = ______________________________

$O_2(3)$ = ______________________________

$O_3(4)$ = ______________________________

Summe: O = ________________

Setzen Sie ein: "identisch zur" oder "kleiner als die" oder "größer als die":

Die genaue Fläche unter der Kurve ist __________________________________ über die Obersumme O berechnete Fläche.

b) Annäherung der Fläche über die Bildung der Untersumme U mit Balken

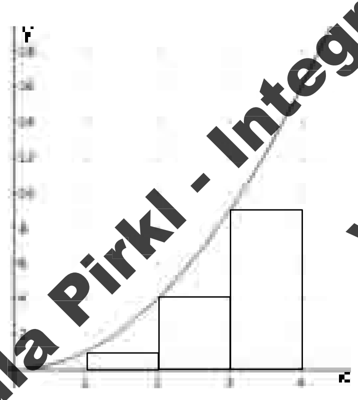


Abb.4.3.2

Berechnung der Rechteckflächen:

$U_0(1)$ = ______________________________

$U_1(2)$ = ______________________________

$U_2(3)$ = ______________________________

$U_3(4)$ = ______________________________

Summe: U = ________________

Ergänzen Sie entsprechend zur Obersumme: Die genaue Fläche unter der Kurve ist

__________________________________ über die Untersumme U berechnete Fläche.

Kapitel 5: Rechenregeln für Integrale

Bei der Berechnung von Flächen mithilfe der Stammfunktion bzw. der Integralrechnung gelten alle für die im Kapitel 1 bis 3 für Geraden hergeleiteten Regeln. Zusätzlich kommen nun noch Definitionen und einige Rechenregeln für den Umgang mit Integralen hinzu.

Def.: Ein Integral, bei dem keine Grenzen angegeben sind, nennt man **unbestimmtes Integral**.

$$I = \int f(x)\,dx = F(x)$$

Man lässt die eckige Klammer bei der Stammfunktion weg und fügt dafür die Integrationskonstante hinzu.
Ein Integral, bei dem Grenzen angegeben sind, nennt man **bestimmtes Integral**.

Bestimmung der Stammfunktion bei einfachen Potenzfunktionen:

Potenzregel mit Faktorregel: $f(x) = ax^n \Rightarrow F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$

Ü5.1 Beweisen Sie die Potenzregel, indem Sie die erste Ableitung der Stammfunktion berechnen.

Ü5.2 Berechnen Sie jeweils die Stammfunktion und überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die ermittelte Stammfunktion wieder ableiten und tragen Sie die Ergebnisse ein.

a) $f(x) = 4$ F(x)=
b) $f(x) = 5x$ F(x)=
c) $f(x) = 3x^2$ F(x)=
d) $f(x) = 8x^3$ F(x)=
e) $f(x) = 10x^4$ F(x)=
f) $f(x) = 15x^5$ F(x)=
g) $f(x) = 3x^6$ F(x)=
h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ F(x)=
i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ F(x)=
j) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ F(x)=
k) $f(x) = \sqrt{x}$ F(x)=
l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ F(x)=

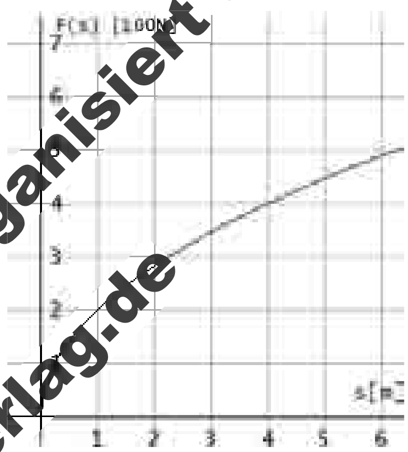
Kapitel 6: Kontextbezogene Bedeutung von Flächen

Wenn man eine Fläche mithilfe der Integralrechnung berechnet und dieser dann die Einheit Flächeneinheiten FE zuordnet, versteht man darunter in der Regel, dass es sich um eine Fläche im geometrischen Sinn handelt. Wie Sie jedoch im Einstiegsbeispiel zu Beginn des ersten Kapitels gesehen haben, kann einer Fläche im Koordinatensystem im Kontext einer Aufgabenstellung auch eine andere Bedeutung zukommen. In diesem Kapitel sollen exemplarisch einige dieser Aufgabenstellungen behandelt werden.

1. Flächen im Kraft-Weg-Diagramm

Ein Roboterarm benötigt für die Bewegung eines Gegenstandes auf einem Fließband über die Strecke von 0 bis 4 m eine Kraft, die mithilfe der Funktion $F(s) = 2\sqrt{s}$ beschrieben werden kann.

Die Funktion F(s) ist im Diagramm nebenan dargestellt.



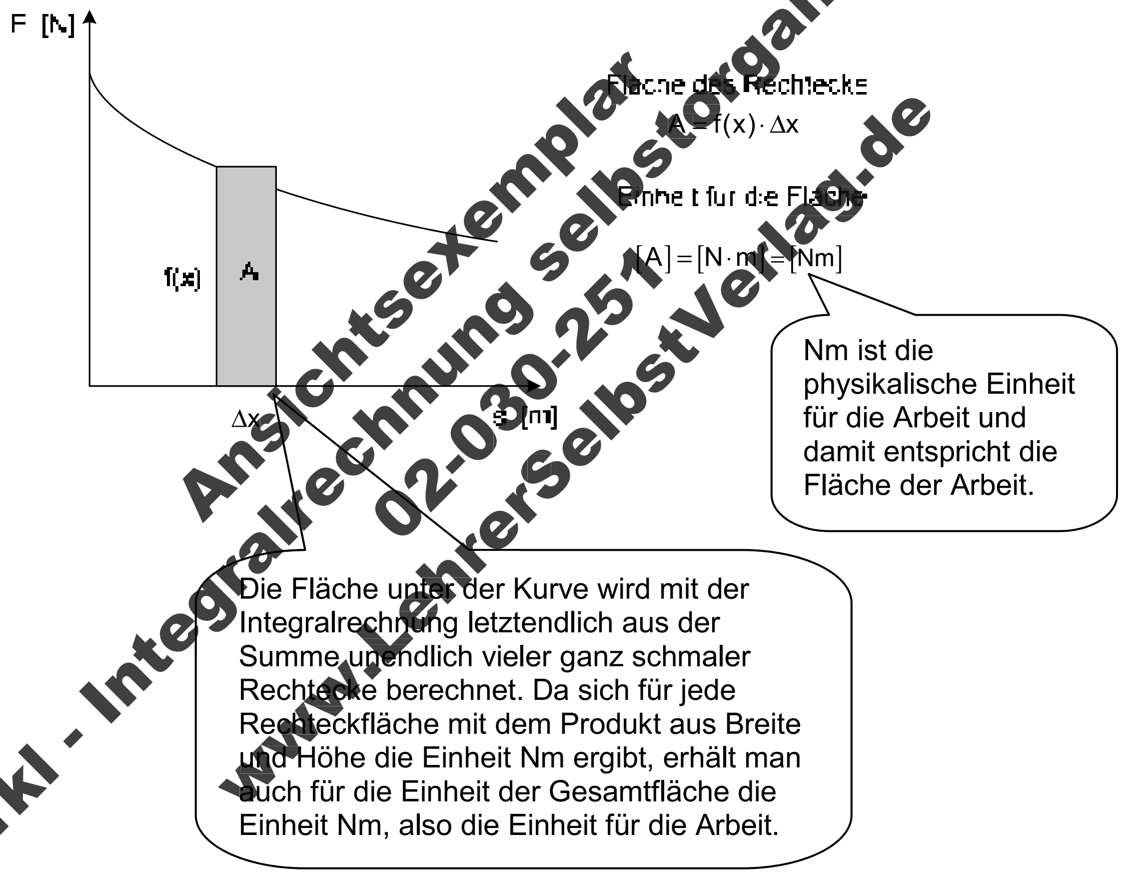
Begründen Sie, warum man die hier verrichtete Arbeit mithilfe des Ansatzes $W = \int_0^4 F(s)ds$ berechnen kann, und zeigen Sie mithilfe einer Rechnung einschließlich der Betrachtung von Einheiten, dass sich für die verrichtete Arbeit folgender Wert ergibt: W = 1067 Nm

2. Grundlegendes zur Bedeutung von Flächen

Im Beispiel zur Berechnung der Arbeit ist die kontextbezogene Bedeutung durch die Ausführungen zum Einstiegsbeispiel in den Vorbetrachtungen ersichtlich. Hier soll eine grundlegende Möglichkeit verdeutlicht werden, wie man die Bedeutung einer Fläche ermitteln kann.

Merkmal 1: Es handelt sich in der Regel um Flächen im ersten Quadranten des Koordinatensystems.

Merkmal 2: Das Produkt der Einheiten der Größen, die mit der y- und x-Achse dargestellt werden, muss eine sinnvolle neue Einheit ergeben. Begründung anhand der Berechnung der Arbeit.



Weitere Beispiele für Flächen mit kontextbezogener Bedeutung.

Auf der x- und y-Achse werden die im Folgenden angegeben Größen abgetragen. Geben Sie jeweils die Einheit und die Bedeutung der Fläche an.

Bedeutung der y-Achse	**Bedeutung der x-Achse**	**Einheit der Fläche**	**Bedeutung der Fläche**
Geschwindigkeit eines Fahrzeuges v(t) Einheit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Zeit t Einheit [s]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	
Zufluss- bzw. Abflussrate von Wasser in einen Behälter r(t) pro Sekunde Einheit $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	Zeit t Einheit [s]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	
Änderungsrate der Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit k(t) pro Stunde Einheit $\left[\frac{kg}{h}\right]$	Zeit t Einheit [h]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	
Ausstoß von Rußpartikeln pro Tag r(t) Einheit $\left[\frac{mg}{d}\right]$	Zeit t Einheit [d]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	
Ausstoß von Rußpartikeln mit einem bestimmten Durchmesser r(x) Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\mu m}\right]$	Durchmesser x Einheit [µm]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	
Beschleunigung eines Fahrzeugs a(t) Einheit $\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Zeit t Einheit [s; h; etc.]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=\left[\quad\right]$	
Anzahl verkaufter oder produzierter Artikel pro Zeit, d.h. Verkaufsrate oder Produktionsrate Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{Zeit}}\right]$	Zeit t Einheit [s; h; min; …]	$[A]=\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$ $[A]=[\quad]$	

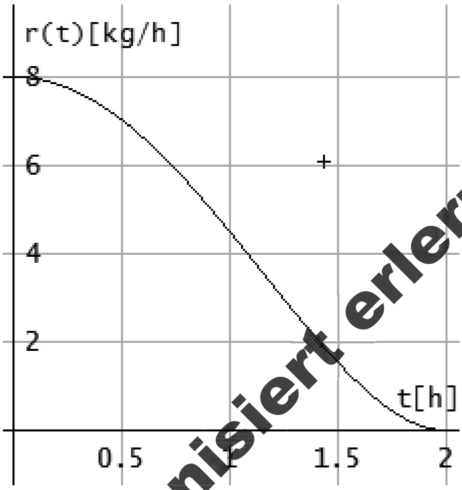
Übungen

Ü6.1 Dem nebenan abgebildeten Graph kann entnommen werden, welche Menge einer Reagenz bei einem chemischen Prozess zu einem Zeitpunkt t entsteht. Damit wird die Reaktionsgeschwindigkeit r(t) angegeben. Für

r(t) gilt: $r(t) = 0{,}5x^4 - 4x^2 + 8$

Einheiten: r(t) wird in der Einheit $\frac{kg}{h}$ und die Zeit t in der Einheit Stunde h angegeben.

Begründen Sie, warum man die Menge R der insgesamt entstandenen Reagenz mithilfe des Ansatzes $R = \int_0^2 r(t)dt$ berechnen kann und zeigen Sie mithilfe einer Rechnung einschließlich der Betrachtung von Einheiten, dass sich hier R = 8,533 kg ergeben.



Kapitel 7: Parameteraufgaben

Bisher haben Sie Flächen bei Funktionen berechnet, die eindeutig bestimmt waren, bei denen also außer der Variable x keine weiteren Variablen vorgekommen sind. Es gibt jedoch auch Aufgabenstellungen, bei denen die Gleichung einer Randfunktion eine weitere Variable, einen sogenannten **Parameter**, enthält. Im Folgenden wird im Beispiel 1 zu diesem Aufgabentyp eine Aufgabenstellung aus dem Bereich der Architektur vorgestellt und im Beispiel 2 eine rein formale Aufgabe ohne Anwendungsbezug bearbeitet.

Beispiel 1:

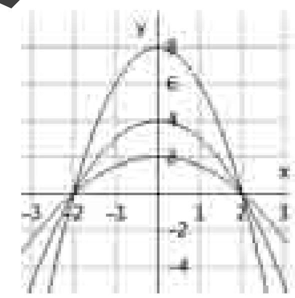
Ein Gebäude soll auf Wunsch eines Bauherrn im Giebel ein Fenster erhalten, dessen oberer Rand durch eine Parabel und dessen unterer Rand von der x-Achse begrenzt wird. Der parabelförmige Rand des Fensters soll durch die Gleichung $r_a(x) = -ax^2 + 4a$ bestimmt werden und die Fensterfläche soll insgesamt 16 m² betragen.

Überlegungen zum Verständnis der Aufgabenstellung:

Sie haben bisher wahrscheinlich noch keine oder nur wenig Erfahrungen mit Funktionen, die einen Parameter enthalten, gesammelt. Daher soll nun zunächst verdeutlicht werden, was der Parameter bewirkt. Dazu sind in der folgenden Abbildung die Parabeln zu den Parametern a = 1, a = 2 und a = 0,5 abgebildet. Ordnen Sie den Parabeln die Nummer des Graphen zu und beschreiben Sie Ihre Überlegungen:

gegebene Funktion: $r_a(x) = -ax^2 + 4a$

(1) a = 1 $r_1(x) = -x^2 + 4$
(2) a = 2 $r_2(x) = -2x^2 + 8$
(3) a = 0,5 $r_{0,5}(x) = -0,5x^2 + 2$



Erläutern Sie, welche Auswirkung der Parameter a auf die Fläche des Fensters hat und markieren Sie die Fläche, welche von $r_1(x)$ bestimmt wird.

Lösungsvorschlag für die Aufgabenstellung

Man kann aufgrund des gekrümmten Randes nicht direkt sehen, für welches a die Fensterfläche den gewünschten Wert von 16 m^2 annimmt. Die Vorgehensweise zur Ermittlung des passenden Parameters a soll nun schrittweise erfolgen:

Kapitel 8: Rekonstruktion von Funktionen

Bisher haben Sie hinsichtlich der Integralrechnung Aufgaben bearbeitet, bei denen nur ein Parameter im Funktionsterm enthalten war. Nun wird diese Aufgabenstellung so erweitert, dass kein Koeffizient bekannt ist.

Auch bei diesem Aufgabentyp, den Sie bereits aus der Klasse 11 kennen, kann man ähnlich wie bei der Untersuchung von Kurven oft systematisch vorgehen, indem man den gegebenen Aufgabentext schrittweise analysiert. Die Vorgehensweise soll an einem rein formalen Beispiel ohne Anwendungsbezug dargestellt werden.

1. Zuordenen eines Funktionstyps

Man muss aus der Aufgabenstellung zunächst herausarbeiten, um welchen Typ von Funktion es sich handelt und dann für diesen Funktionstyp die allgemeine Gleichung notieren. Im Folgenden sind die Ansätze für die häufigsten Funktionstypen aufgelistet.

Ganzrationale Funktion 2. Grades (Parabel)

ohne Symmetrie	mit Achsensymmetrie
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^2 + b$

Ganzrationale Funktion 3. Grades

ohne Symmetrie	mit Punktsymmetrie
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^3 + bx$

Ganzrationale Funktion 4. Grades (Parabel)

ohne Symmetrie	mit Achsensymmetrie
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

2. Bedingungsanalyse

Nun muss man aus der Aufgabenstellung herausarbeiten bzw. analysieren, welche Bedingungen für den Verlauf der Funktion gegeben sind. Die Informationen sind häufig verschlüsselt gegeben, beziehen sich aber auf Kurvenpunkte, die Lage von Extremwerten und Wendepunkten. Neu kommt jetzt hinzu, dass sich eine Bedingung auf eine Flächenangabe bezieht.

Im Folgenden wird ein Lösungsverfahren, bei dem gegebene Bedingungen schrittweise in den Funktionsterm eingearbeitet werden, an einem konkreten Beispiel gezeigt. Dieser Lösungsweg lässt sich weitgehend auf andere Aufgaben übertragen.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte des Lösungswegs.

Aufgabenstellung

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung verläuft und an der gleichen Stelle wie die Funktion $k(x) = x^2 - 2x + 1$ einen Extremwert hat. Bei x = 2 befindet sich der Wendepunkt. Die Funktion schließt mit der Geraden x = 2 und den beiden Koordinatenachsen im vierten Quadranten eine Fläche von 12 FE ein.

Allgemeiner Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Es ist günstig mit einer Bedingung, für die x = 0 gilt zu beginnen, da hier sofort der Koeffizient, der kein x hat, ermittelt werden kann.

Analysieren der 1. Bedingung:	Funktion verläuft durch den Ursprung O(0/0)
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	$f(0) = 0$
Einsetzen der Werte:	$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$ $d = 0$
1. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

d = 0 wird in die allgemeine Ausgangsfunktion eingesetzt und man erhält ein erstes Zwischenergebnis für den Funktionsterm, in dem nun nur noch drei Koeffizienten bestimmt werden müssen.

Es ist günstig mit der Bedingung für den Wendepunkt fortzufahren, da in der zweiten Ableitung nur die Koeffizienten a und b vorhanden sind und man b in Abhängigkeit von a ausdrücken kann.

Analysieren der 2. Bedingung:	Wendepunkt bei x = 2
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	$f''(2) = 0$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$
Einsetzen der Werte:	$6a \cdot 2 + 2b = 0$ $12a + 2b = 0$ $b = -6a$
2. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$

x = 2 wird in die zweite Ableitung von f(x) eingesetzt.

Für b wird nun der eben ermittelte Ausdruck "– 6a" in f(x) eingesetzt. Man erhält nun ein zweites Zwischenergebnis für den Funktionsterm, in dem sich die Anzahl der Koeffizienten auf zwei reduziert hat.

Analysieren der 3. Bedingung:	Die x-Koordinate für den Extremwert der gesuchten Funktion f(x) stimmt mit der x-Koordinate des Extremwertes der Funktion k(x) überein. Also muss die x-Koordinate des Extremwertes von g(x) berechnet werden: $k(x) = x^2 - 2x + 1$ $k'(x) = 2x - 2$ $\text{Extremwert: } k'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 = 0$ $\Rightarrow \quad x = 1$ Damit hat die Funktion f(x) an der Stelle x = 1 einen Extremwert.
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	$f'(1)=0$ mit $f'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$
Einsetzen der Werte:	$3a \cdot 1^2 - 12a \cdot 1 + c = 0$ $-9a + c = 0$ $c = 9a$ x = 1 wird in die erste Ableitung von f(x) eingesetzt.
3. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$

Durch Einsetzen von 9a für c erhält man ein drittes Zwischenergebnis, in dem nur noch der Koeffizient a vorhanden ist.

Den letzten Koeffizienten a bestimmt man nun über die Flächenbedingung. Da nur noch ein Parameter vorhanden ist, geht man hier wie bei der Parameteraufgabe in Kapitel 7 vor.

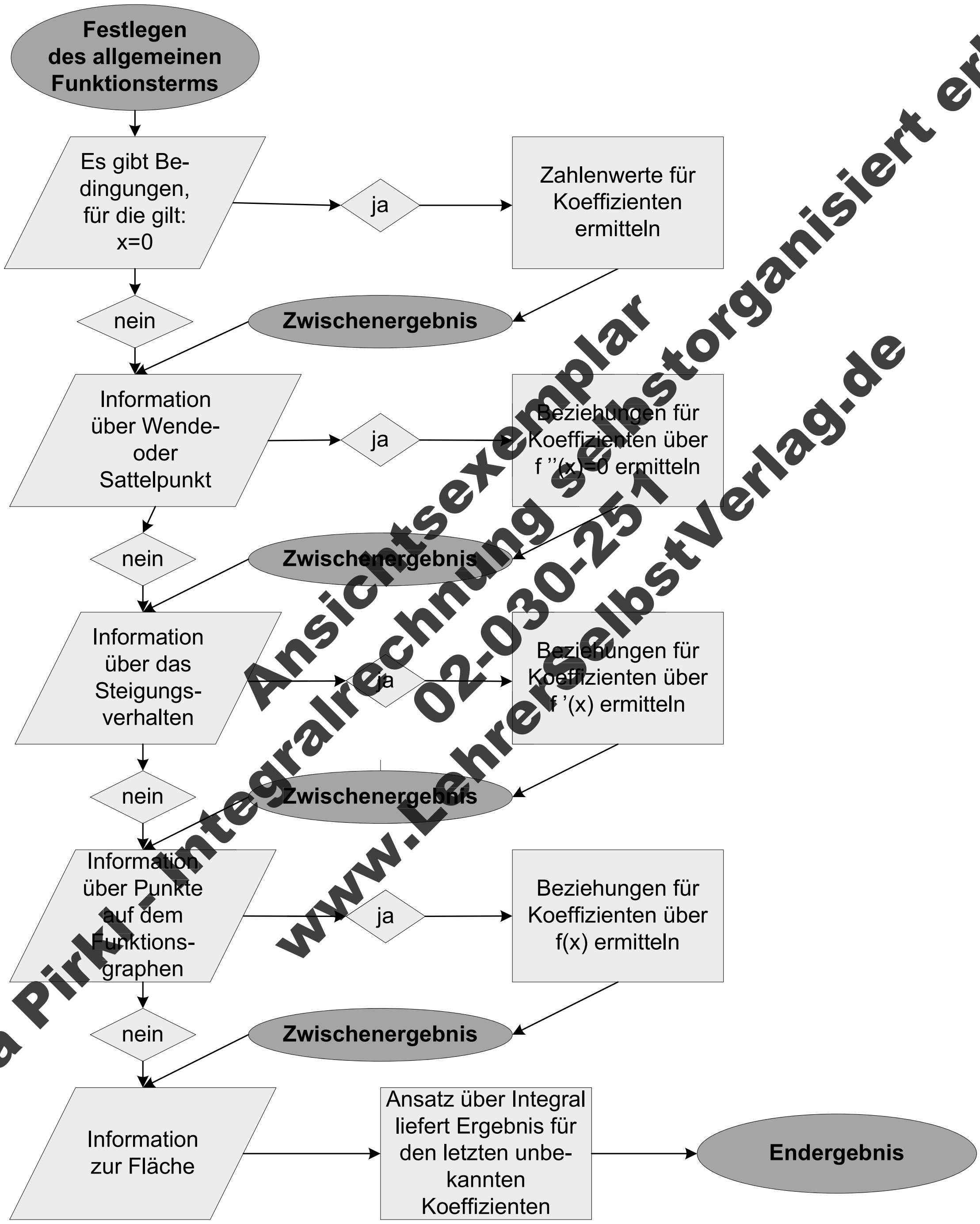
Analysieren der 2. Bedingung:	Die liegt zwischen den Grenzen 0 und 2 im vierten Quadranten, also unterhalb der x-Achse.
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	$A_0(2) = -12$
Einsetzen der Werte:	$\int_0^2 f(x)dx = -12$ $\int_0^2 (ax^3 - 6ax^2 + 9ax)dx = -12$ $\left[\frac{1}{4}ax^4 - 2ax^3 + \frac{9}{2}ax^2\right] = -12$ $4a - 16a + 18a = -12$ $6a = -12$ $a = -2$
Endergebnis:	$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$

Der Koeffizient a wird mit der Flächenbedingung zahlenmäßig bestimmt und in das dritte Zwischenergebnis eingesetzt.

Achtung:
Man muss darauf achten, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. Bei Flächen oberhalb der x-Achse wird der Betrag mit positivem und bei Flächen unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Strukturdiagramm zur Lösung von Rekonstruktionsaufgaben

Die Abfolge der einzelnen Lösungsschritte bei der Rekonstruktion von Funktionen kann den Rechenaufwand erheblich beeinflussen. Es ist daher sinnvoll, mit der im Diagramm vorgeschlagenen Abfolge von Arbeitsschritten vorzugehen und jeweils mit den Zwischenergebnissen, in denen die Anzahl der unbekannten Koeffizienten schrittweise geringer wird, weiter zuarbeiten.

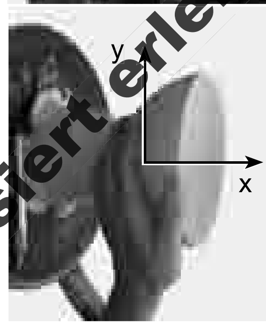


Aufgaben im Schulbuch: ____

____

Kapitel 9: Volumenintegrale

Schaut man einem Kunsthandwerker beim Töpfern auf der Töpferscheibe zu, erkennt man, dass hier rotationssymmetrische Gegenstände entstehen. Das Volumen dieser Gegenstände kann man mithilfe der Integralrechnung ermitteln.

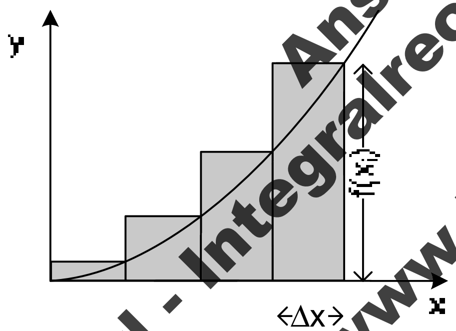


Für Berechnungen ist es einfacher, wenn sich der Rotationskörper um die x-Achse dreht. Dazu dreht man den Gegenstand, wie nebenan dargestellt, in Gedanken um 90°.

Die Formel für die Volumenberechnung eines solchen Rotationskörpers wird durch Gegenüberstellung mit der Herleitung der Integrationsformel erläutert. Bearbeiten Sie dabei zuerst die linke Spalte und übertragen Sie die Ansätze und Überlegungen auf die rechte Spalte.

Fläche unter einer Kurve

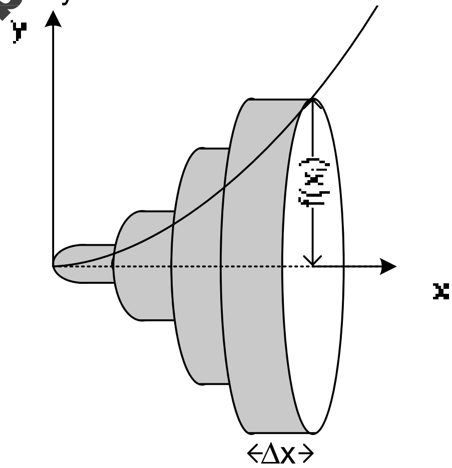
In Kapitel 4 wurde die formelmäßige Beziehung für das Integral mithilfe von Obersummen aus n Balkenflächen hergeleitet.



Die Fläche eines Balkens lässt sich mit der Flächenformel für das Rechteck über $A = f(x_i)\Delta x$ berechnen.

Rotationsvolumen

Lässt man die rechteckigen Balken der Abbildung in der linken Spalte um die x-Achse rotieren, so entstehen zylindrische Scheiben:



Das Volumen eines Zylinders lässt sich, wie Sie in der Sekundarstufe 1 gelernt haben, mit der Formel $V = \pi r^2 h$ berechnen. Begründen sie nun, warum man die i-te Zylinderscheibe in der Abbildung mit folgender Formel berechnen kann:

$$V_i = \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

____

____

Kapitel 11: Lineare Substitution

1. Wiederholung Zusammenhang Stammfunktion – Randfunktion – Ableitungsfunktion

Aufgabe 11.1
Verdeutlichen Sie sich am Beispiel der gegebenen Funktion f(x) = $12x^3 + 3x^2$ die Zusammenhänge zwischen Randfunktion f(x), Stammfunktion F(x) und Ableitungsfunktion f '(x). Füllen Sie dazu die Lücken im Text aus. Auf das Hinzufügen der Integrationskonstanten soll hier zur Vereinfachung verzichtet werden.

$F(x) = 3x^4 + x^3$

Aufleiten der Randfunktion

liefert die ___________________

also $\int f(x)dx =$ _______________

Ableiten der Stammfunktion

liefert die ___________________

also: F'(x)= ___________________

$f(x) = 12x^3 + 3x^2$

Aufleiten der Ableitungsfunktion

liefert die ___________________

also $\int f'(x)dx =$ _____

Ableiten der Randfunktion

liefert die ___________________

_________________ also f '(x)

$f'(x) = 36x^2 + 6x$

2. Lineare Substitution

Beim Ableiten von Funktionen mit der Kettenregel haben Sie bereits die Begriffe innere und äußere Funktion kennengelernt. Diese Begriffe spielen nun auch bei der hier behandelten Integrationsregel eine Rolle, wobei hier nur Funktionen behandelt werden, bei denen die **innere Funktion u(x)** eine **lineare Funktion** ist, also die Form **u(x) = ax + b** hat.

Mit der nun folgenden Aufgabe sollen grundlegende Zusammenhänge zwischen der Randfunktion f(x) und der zugehörigen Ableitungsfunktion f '(x) für Funktionen verschiedener Funktionsklassen mit linearer innerer Funktion wiederholt werden.

Kapitel 12: Allgemeines Substitutionsverfahren

Wie Sie im Kapitel "Lineare Substitution" bereits erkannt haben, wird dieses Integrationsverfahren bei Funktionen eingesetzt, bei denen man zum Ableiten die Kettenregel verwendet. Wie bei der linearen Substitution wird meist auch bei komplizierteren Funktionen die innere Funktion substituiert. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen häufig auftretende Standardmethoden bei der Substitution behandelt werden.

1. Standardverfahren bei der Integration durch Substitution

Die standardmäßige Vorgehensweise bei der Integration durch Substitution soll anhand der folgenden Funktionen beispielhaft verdeutlicht werden. Das Substitutionsverfahren kann vor allem dann angewendet werden, wenn im Funktionsterm die Ableitung einer inneren Funktion u(x) als Faktor vorkommt.

u'(x) = 2x steckt hier drin, denn $4x = 2 \cdot 2x$

m(x) = $-10x(2-3x^2)^4$

u(x) = $2 - 3x^2$

u'(x) = 6x steckt hier drin, denn $10x = \frac{5}{3} \cdot 6x$

$\mathbf{n(x) = \frac{4x}{(x^2+8)^2}}$

u(x) = x² + 8

u'(x) = 2x steckt hier drin, denn $x = \frac{1}{2} \cdot 2x$

$\mathbf{p(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}$

u(x) = $x^2 - 1$

q(x)=$\sin^2 x \cos x$

u(x) = sinx

u'(x) = cosx

Aufgabe 12.1

Erläutern Sie für die Beispiele a) bis d) die jeweils erfolgten Rechnungen bzw. ergänzen Sie fehlende Rechenschritte:

a) Unbestimmte Integration der Funktion m(x) durch Substitution

Die innere Funktion wird substituiert

$M(x) = \int -10x(2-3x^2)^4 dx$

Substitution: $u = 2 - 3x^2$ ________________________________

$\frac{du}{dx} = 6x$ ________________________________

$dx = \frac{du}{6x}$ ________________________________

$M(u) = \int 10xu^4 \frac{du}{6x}$ ________________________________

$M(u) = \frac{5}{3}\int u^4 du$ ________________________________

$M(u) = \frac{5}{3}\frac{1}{5}u^5$ ________________________________

$M(x) = \frac{1}{3}(2-3x^2)^5 + c$ ________________________________

x muss sich vollständig kürzen lassen.

Kapitel 14: Beispiele zur Integration von e-Funktionen

1. Numerische Integration

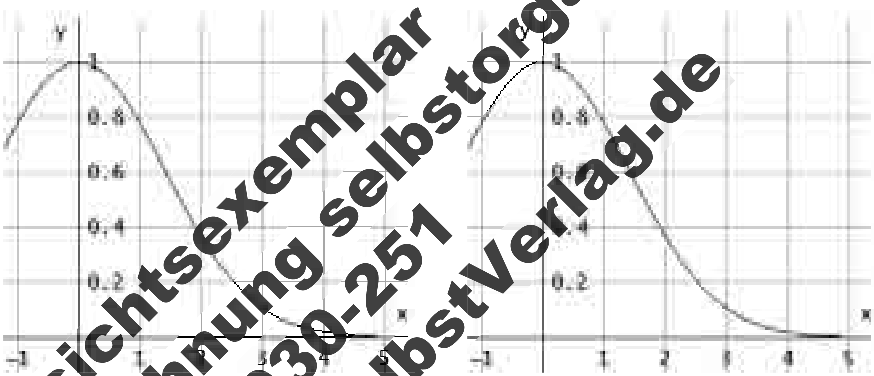
Für e-Funktionen wie $f(x) = e^{-x^2}$ existiert keine Stammfunktion. Daher kann man das Substitutionsverfahren und die partielle Integration nicht anwenden. Flächen können hier jedoch mit numerischen Verfahren wie der Mittelwertbildung aus Ober- und Untersumme oder dem Trapezverfahren approximiert werden.

Aufgabe 14.1

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Fläche, welche die Funktion $f(x) = e^{-0{,}25x^2}$ im Intervall [0;4] mit der x-Achse einschließt, indem Sie die Fläche bei einer Balkenbreite von $\Delta x = 1$ mithilfe von Ober- und Untersumme approximieren. (Kontrollergebnis: $A \approx 1{,}76$ FE)

Obersumme Untersumme

a) Zeichnen Sie in den beiden Abbildungen im ersten Quadranten die Balken für die Obersumme bzw. für die Untersumme ein.



b) Ermitteln Sie die folgenden Funktionswerte und berechnen Sie den Näherungswert für die Fläche A .

f(0) = __________

f(1)= __________

f(2)= __________

f(3)= __________

f(4)= __________

Obersumme: O = ____

Untersumme: U= ____

Näherungswert für die Fläche: A ≈ ____

c) Erläutern Sie, wie man den Nährungswert für A verbessern kann:

____

Kapitel 15: Logarithmische Integration

Besonders einfach ist die Integration durch Substitution, wenn die Funktion in die Form $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden kann. Ergänzen Sie:

Beispiel:

$f(x)=\frac{1}{1+4x}$ Substitution $u=1+4x$

$\frac{du}{dx}=$ ____

$dx=$ ____

$F(x)=\int\frac{1}{u}\,\text{——}=\frac{1}{4}\int\text{—}\,du$

Die Substitution führt zum Ausdruck $\int\frac{1}{u}du$, was nach Integration $\ln|u|$ ergibt.

$F(x)=\frac{1}{4}\ln|u|$

$F(x)=\frac{1}{4}\ln|1+4x|+c$

Betragsstriche können entfallen, wenn hier ein Ausdruck entsteht, der immer positiv ist.

Ergänzen Sie zum Merksatz:

> Da alle Funktionen, welche in die Form $f(x)=k\frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden können, auf das
>
> Integral $k\int\frac{\;}{\_\_}du$ führen, kann man das ausführliche Integrationsverfahren umgehen und die
>
> Stammfunktion sofort mit der Formel $F(x)=$ ____________ ermitteln.

Ü15.1

Geben Sie ohne ausführliche Rechnung die Stammfunktionen an. Achten Sie auf Betragsstriche:

a) $f(x)=\frac{3}{x-1}$

$F(x)=$

b) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

$F(x)=$

c) $f(x)=\frac{x}{9x^2+1}$

$F(x)=$

d) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

$F(x)=$

e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$F(x)=$

f) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$

$F(x)=$

Aufgaben im Schulbuch: ____